现代数学基础丛书 130

自相似集的结构
——Hausdorff 测度与上凸密度
（第二版）

周作领 瞿成勤 朱智伟 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3748.0101)



销售分类建议：高等数学

定 价：38.00 元

现代数学基础丛书　130

自相似集的结构

——Hausdorff 测度与上凸密度

(第二版)

周作领　瞿成勤　朱智伟　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要研究满足开集条件的自相似集，从Hausdorff测度和上凸密度的计算与估计到其内部结构的理论研究，都有比较全面的阐述. 全书共分四章和两个附录. 第1章介绍基本定义、符号和基本命题；第2章讨论自相似集；第3章讨论上凸密度；第4章讨论自相似集的结构和相关问题；附录A介绍必要的集合论和点集拓扑的基础知识；附录B介绍必要的测度论基础知识. 第二版在第一版的基础上对第3章和第4章及两个附录做了比较大的修改和补充.

本书可作为高等院校分形几何方向研究生、教师的教学用书，亦可供相关方向研究人员和技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

自相似集的结构：Hausdorff 测度与上凸密度/周作领，瞿成勤，朱智伟著. —2版. —北京：科学出版社，2010

(现代数学基础丛书；130)

ISBN 978-7-03-026284-4

Ⅰ.自… Ⅱ. ①周… ②瞿… ③朱… Ⅲ.几何测度论 Ⅳ.O174.12

中国版本图书馆CIP数据核字(2009) 第237783号

责任编辑：赵彦超／责任校对：郑金红
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年1月第 二 版 印张：13
2010年1月第二次印刷 字数：234 000
印数：3 001—5 500

定价：38.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

符 号 表

$A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$ 或 $A_n \to_{\mathcal{H}} A$	紧致集合序列在 Hausdorff 度量意义下的收敛
$B(x,r)$	x 的半径为 r 球形 (开) 邻域或 r 邻域
$B(E,r)$	集合 E 的半径为 r 的球形 (开) 邻域
$\mathfrak{B}(X)$	空间 X 的 Borel σ 代数
C	中间三分 Cantor 集
$\mathcal{C}$	空间的紧致集合族
$\overline{D}_c^s(E,x)$	集合 E 在点 x 处的上凸密度
$\dim_B$	盒维数
$\underline{\dim}_B$	下盒维数
$\overline{\dim}_B$	上盒维数
$\dim_{\mathcal{H}}$	Hausdorff 维数
$\dim_p$	填充 (packing) 维数
$\mathrm{ent}(f)$	紧致系统 (X,f) 的拓扑熵
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
2^X	集合 X 所有非空子集的集合
E^0	E 的内集
E_1	E 中上凸密度为 1 的集合
$\lvert E\rvert$	集合 E 的直径
$E(X,f)$	紧致系统 (X,f) 的遍历测度的集合
$F(f)$	紧致系统 (X,f) 的不动点集
$F(E)$	E 的所有相似压缩函数系的相似压缩的不动点的集合
$h_m(f)$	保测映射 f 的测度熵
$\mathrm{int}(E)$	集合 E 的内集
$I_1 :\sim_1$	E 中点按微结构的分类
$I_2 :\sim_2$	E 中点按上凸密度的分类
$\mathcal{H}^s(E)$	集合 E 的 s 维 Hausdorff 测度
$L^n(E)$	集合 E 的 n 维 Lebesgue 测度 (体积)
$M(X)$	紧致度量空间上全体概率测度的空间
$M(X,f)$	紧致系统 (X,f) 的不变测度的集合
M_x	紧致系统 (X,f) 沿点 x 轨道生成的不变测度的集合
N 或 Z_+	全体自然数或正整数
$\mathcal{P}^s(E)$	集合 E 的 s 维填充测度

$P(f)$	紧致系统 (X,f) 的周期点集
Q	有理数集合
$R(f)$	紧致系统 (X,f) 的回复点集
S_m	测度 m 的支撑
(X,f)	紧致空间上连续自映射构成的紧致系统
Σ_k	k 符号空间
$\sigma:\Sigma_k\to\Sigma_k$	k 符号空间上的转移自映射
$\Omega(f)$	紧致系统 (X,f) 的 Ω 极限集
∂E	E 的边界集
$\aleph_0$	有理数的基数
$\aleph$	无理数的基数

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书第一版出版于 2008 年 7 月, 至今不过一年有余. 第二版不仅纠正了第一版中的差错, 更重要的是补充了作者一年多来新的研究成果.

满足开集条件的自相似集是最简单的一类分形. 这类分形集有两大特点, 即有较好的 “精细” 结构或称 “无穷嵌套的自相似结构” 和它们的 $\mathcal{H}$ 维数被完全确定, 这为系统研究其 $\mathcal{H}$ 测度的理论和计算提供了最基本的条件. 比满足开集条件更大的分形族, 如自仿集族、Moran 集族、s 集族等, 或是因为 $\mathcal{H}$ 维数目前还不能完全确定, 或是 “精细” 结构不充分, 都无法作系统的 $\mathcal{H}$ 测度理论和计算研究.

人们虽然很早就知道 $\mathcal{H}$ 测度的计算是非常困难的, 但究竟困难到何种程度, 症结何在, 人们是远不清楚的, 以至于这项研究长期停滞不前, 甚至看不到任何希望. Falconer 引进的上凸密度概念 (连同他证明的重要定理) 是 $\mathcal{H}$ 测度理论和计算研究的转折点, 是这项研究的第一道曙光. 这个概念事实上孕育了一个新的研究领域 —— 自相似集的内部结构. 一个时期以来, 人们把自相似集的内部当成铁板一块, 似乎无结构可言, 至少无人触及这个问题. 自相似集的内部有结构吗? 当然有! 而且其复杂程度可以与天体的 “黑洞” 相比, 其中蕴涵了 $\mathcal{H}$ 测度计算困难的症结和研究出路. Falconer 引进的那道曙光洞穿了这个 “黑洞” 的一角, 使得人们有可能得窥其中的奥妙.

上凸密度是本书的概念源头. 作者引进和证明的 “部分估计原理”、“最好覆盖”、“最好形状” 等结果和概念都与上凸密度有关, 它们把原本不相干的问题联系起来, 使一系列新问题浮出水面, 使研究顿时活络起来. 每一个测度都对应有一个密度. 仔细研究可以发现, 上凸密度正是 $\mathcal{H}$ 测度所对应的密度. 发现这种对应并不重要, 重要的是随着上凸密度的引入, 由 Falconer 证明的那个定理 (即上凸密度为 1 的点集合可测且与原集合有相同的 $\mathcal{H}$ 测度) 揭示了两者间深刻的内在联系. 不同的点可以有不同的上凸密度. 为了刻画这个问题, 作者引进 “微结构” 的概念, 它是由上凸密度直接引申出来的. 所谓一个点的微结构, 就是指该点的一个开邻域在自相似集中的 “微环境”. 概括而言, 自相似集 (极限集) 最后是由可数个包含整个自相似集的递减紧致集合序列的可数交生成的. 归纳地, 每多交一次, 多余的点就被多剥离一些, 可数交之后留下的点就构成自相似集本身. 在这个过程中, 每一个点都形成自己的 “微环境”(事实上, 即该点的一个开邻域与自相似集本身的交). 如果对具体的分形, 例如 Sierpinski 垫片或 Koch 曲线等进行考察, 这个过程是非常清楚的. 不同的点一般有不同的 “微环境”, 正是点的 “微环境” 决定了该点基本性质,

包括该点的上凸密度, 这种 “微环境” 就称之为 “微结构”. 从定义不难看出, 有几何相似的微结构的点有相同的上凸密度, 但反过来却一般不成立. 有些问题看起来不会太困难, 却一直无法解决, 其原因往往都与微结构有关, 例如, 生成 Sierpinski 垫片的正三角形的边上的中点有不小于其顶点的上凸密度是明显的, 但究竟是大于还是等于, 这个问题不应该太困难, 但至今确定不了. 再如, Koch 曲线上面那个顶点有不小于其端点的上凸密度也是明显的, 但究竟是大于还是等于, 很长一段时间也确定不了. 类似的例子还有很多, 表面上看起来很简单的问题, 却往往使人有无从下手之感而长期悬而不决.

从上面描述中可以看出, 微结构一般是非常复杂的, 甚至有些 “难以捉摸”, 计算 $\mathcal{H}$ 测度等所遭遇到的困难都与它有关. 看起来, 深入研究自相似集理论非得从微结构这个棘手的概念入手不可.

$\mathcal{H}$ 测度的计算是基础数学而非计算数学. 本书从否定 Marion 的两个猜测开始. 为了否定 Marion 的猜测, 我们估计了 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度的上限, 这事实上开启了计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度的先河, 但它只是起了把我们的研究引向深入的作用, 而不是我们考虑的重点. 从基础数学观点, 计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度是 “标”, 而探讨自相似集的内部结构才是 “本”, “本” 不明而 “标” 焉能清? 正是基于这种观点, 我们对本书第一版的修改补充集中在第 3, 4 两章, 其中包括一些新结果和提出的一些新问题, 而更重要的是一些新的思考. 另外, 对两个附录也作一些补充.

维数和测度是分形几何两大支柱性概念, 计算和估计分形的维数和测度是分形几何最基本的课题. 维数的计算和估计研究已有多年历史并取得很多重要成果, 例如, 近年来动力系统与分形几何相结合, 有人开始研究不变测度的维数问题, 出现的一系列新问题对揭示动力系统的深入性质有着重要作用 [3,23]. 但对测度而言情况却远非如此, 可以说至今仍是一片空白. 对最简单的满足开集条件的自相似集尚且如此, 遑论其他. 一般分形 (包括不满足开集条件的自相似集以及自仿集、Moran 集、s 集等) 的测度计算和估计应该说还没有提到日程上来, 至多有些零星结果, 远没有形成理论. 本书专门讨论满足开集条件的自相似集, 希望从这种最简单的情形入手, 敲开测度理论研究和计算与估计的大门. 自相似集结构的内容丰富繁杂, 我们只不过刚刚开了一个头而已, 希望能收抛砖引玉之效. 限于作者水平, 错误和纰漏在所难免, 敬希读者不吝批评教正.

在撰写本书的过程中, 作者得到了尹建东博士、李浩博士和陈仁莲博士的帮助, 在此表示诚挚的感谢. 本书的出版得到国家自然科学基金项目 (10971236) 的资助.

周作领

2009 年 7 月 22 日

第一版前言

分形几何是 20 世纪下半叶形成的几何学的一个新的分支, 研究的对象是不规则的几何图形. 经典几何的研究对象是规则几何图形: 线、面、体乃至流形, 它们之外的图形可统称为不规则图形或分形 (fractal), 特点是大都显得 “杂乱无章” 或涉及无限的生成过程. 早在分形几何形成之前, 自然界和科学研究中的这类不规则图形就大量存在, 诸如山峰的轮廓、海岸线、疲劳金属的断裂线或面以及 Cantor 集等. 过去人们对这类图形或回避或浅尝辄止, 这样做对当时的生产和科学研究影响不大, 因为较低的精确度就够了. 随着生产和科学的发展, 情况在改变, 对分形的处理和深入研究已是不可避免的了. 例如, 分形概念的提出和集大成者 Mandelbrot 曾提出这样的问题: “英国海岸线有多长?” [16,17], 这个看似简单的问题, 若给出严格的科学回答并非易事. 但正是这样的一类简单问题和其他发现, 孕育了一个专门以分形为研究对象的几何学新分支 —— 分形几何学. 如上所说, 分形或 “杂乱无章” 或涉及无限生成过程. 对于前者, 真正杂乱无章的图形人们还是无法处理的, 它们多少要有些规律: 某种精细结构. 而在数学上出现的分形大都属于后者, 如前面提到的 Cantor 集, 这样的集合往往具有某些怪异性.

Cantor 集是不可数的但有零长度. 另外的例子是 Koch 曲线或雪花曲线, 有零面积和无限长度. 出现这种 “体积” 或零或无限大的情况都是不便处理的, 它表明人们所使用的测量方式有欠缺. 能否通过适当改变测量方式避免这种情况发生? 单纯改变测量尺度 (单位) 是无法达到我们的目的的, 必须改变测量方式. 大约一百年前, Hausdorff 引进现在以他的名字命名的新的维数和测度: Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度 (以后简称 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度), 为人们提供了一种合适的测量方式. 这里的 $\mathcal{H}$ 维数一般不再是整数, 甚至不是分数, 而是非负实数. 每一个分形都有确定的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度, 正和经典几何中每一个 “图形” 都有确定的维数和 “体积” 一样, 它们是分形最基本的属性. 唯其如此, 计算或估计分形的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度就成了分形几何的最基本的课题, 是一切理论研究和实际应用的出发点. 但是, 这个课题太复杂也太困难了, 其中尤以计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度为更困难. 如上所述, 分形多少要有些精细结构才便于研究. 一类最简单的分形是所谓满足开集条件的自相似集, 它们是一个区域由一组相似压缩函数经无限迭代压缩过程加上适当限制而最终生成的图形, 具有所谓 “无穷嵌套的自相似结构”, 即每次压缩像都与原图形相似, 这种生成机制应该说是简单的和明了的, 对于这类分形, 其 $\mathcal{H}$ 维数的计算问题已被完满解决 (分形几何发展数十年来, 这是迄今为止最完美最漂亮的结果之一), 但其

$\mathcal{H}$ 测度情况却远非如此. 大体上说, 目前人们只知道它们是正的有限数, 如何计算甚至估计都是一片空白, 特别, 当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时更是如此. 关于 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度的结果有如此大的反差, 是令人惊异的, 也是对人们探求欲望的极大诱惑: 为什么生成机制如此简单明了的分形, 其 $\mathcal{H}$ 测度的计算竟如此困难? $\mathcal{H}$ 测度计算的困难已是共识, 例如, 文献 [34] 的一位审稿人指出 "Hausdorff measure is an important notion in the study of fractals. However, there are few concrete results about computation of Hausdorff measure even for some simple fractals. Part of reason is the difficulty of the problem." 但是, 人们对 $\mathcal{H}$ 测度计算的困难的认识是知其然而不知其所以然. 当 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时, $\mathcal{H}$ 测度计算尚有些零星结果, 如经典的 Cantor 集, 而当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时, 至今没有任何具体结果. 有些学者认为, $\mathcal{H}$ 测度的计算可在有限步实现, 情况当然绝非如此.

本书的源头是国外一位学者提出的两个猜测. 1987 年, 加拿大学者 Marion 对两个经典的满足开集条件的自相似集: Sierpinski 垫片和 Koch 曲线 (均有 $\mathcal{H}$ 维数非整数大于 1) 的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值提出猜测. 据作者所知, 这是对 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 的分形的 $\mathcal{H}$ 测度计算的首次探索和尝试, 但十余年内毫无进展, 既不能否定也不能证明. 这引起作者的兴趣并从此进入这一领域, 我们先后否定了这两个猜测, 得到一系列估计结果, 并进而发现, $\mathcal{H}$ 测度计算与上凸密度计算密切相关且在一定条件下两者等价. 上凸密度是一个被文献遗忘了的重要概念, 它首先出现在文献 [5] 中, 此后便在文献中消失. 本书的概念源头就是上凸密度这个概念, 从直觉上, 我们感觉到它似乎是开启进一步研究的钥匙. 正是这个概念导致我们更深一层的思考, 提出研究 "自相似集的结构" 的新领域, 并得出结论: $\mathcal{H}$ 测度计算困难的症结在于人们对自相似集内部结构一无所知. 我们曾把 "自相似集内部结构" 比作天体的 "黑洞", 而上凸密度是从这个 "黑洞" 里透露出的第一缕曙光, 它向人们揭示, 自相似集的内部不是铁板一块, 而是具有丰富的结构. 我们最后的结论是: $\mathcal{H}$ 测度的计算是基础数学而非计算数学, 好的计算方法只能改善精确度, 只有正确的计算模型才能导致准确的结果, 而正确计算模型的建立只能依赖人们对其内部结构的深入了解, "上凸密度" 正是开启自相似集内部结构研究的钥匙. 这条路我们已经走了近十年, 提出一些新方法和新概念, 如 "部分估计原理"、"最好覆盖"、"几乎处处最好覆盖"、"最好形状", "微结构" 等, 也提出一些问题、猜测和新的研究课题, 得到一系列计算和估计结果, 我们的终极目标是建立与 $\mathcal{H}$ 维数的结果相适应的 $\mathcal{H}$ 测度计算的统一公式. 在理论上, 我们的目标已经达到, 即这样的统一公式已经建立. 在实际计算上, 我们的统一公式还不能应用, 因为它涉及一个更基本的领域: 凸集理论, 其中一个著名问题是优化问题, 即给定一个长度, 平面上以这个长度为直径的什么凸集包围的面积最大 (在高维空间可以提出类似问题)? 这个问题 (我们称为 "绝对优化问题") 在凸集理论中已获解决, 可我们更需要的是 "相对优化问题" 或 "带约

束条件的优化问题”. 而据我们所知, 这样的问题的研究在凸集理论中尚付阙如. 以平面为例, 我们的问题是这样的：给定一个长度和一点出发的两条射线, 问什么凸集包围的面积最大? 要求其以给定长度为直径且过该角的顶点并夹在该角的两边之间. 问题似乎很简单甚至初等, 可谓雅俗共赏了, 但至今没有答案! 更何况, 我们还要在分形上讨论凸集, 其难度更可想而知. 不管怎么样, 我们已经揭开了 “自相似集结构” 这个 “黑洞” 面纱的一角, 坚持下去会把我们引向深入. 2004 年, 我们在 *Nonlinearity* 上发表一篇综述文章[35], 总结了我们阶段性的研究成果, 提出 12 个开问题和一组猜测, 据了解, 至 2007 年底, 它已被下载 459 次, 是该杂志被下载次数最多的文章之一.

作者写作本书的动机是试图揭示 $\mathcal{H}$ 测度计算困难的 “所以然”, 总结我们十年来的研究成果, 给出从 $\mathcal{H}$ 测度计算、上凸密度计算到自相似集结构研究的一个较全面系统的阐述, 主要是我们自己的研究成果的阐述. 本书可以说是自相似集的专门研究, 所以在取材上不求全面, 只以本书主题需要为限, 因而很多重要的内容将不包括. 在参考文献的选取上亦不追求全面, 如国内外学者在自相似集研究上也有不少重要成果, 但凡与本书旨趣不同者均未选入. 另外, 本书将采取边叙边议边提问题的写作方式. 但我们所提问题不是习题, 而是开问题甚至猜测. 我们所提出的问题有点类似拓扑学诞生之前的哥尼斯堡七桥问题, 为了解决这个问题, Euler 创造了被称作 “一笔划” 的新思想和新方法, 不但解决了哥尼斯堡七桥问题, 事实上孕育了拓扑学的诞生. 我们所提出的问题的解决也需要新思想和新方法.

本书共分四章和两个附录. 第 1 章属预备章节, 介绍基本定义、术语、符号和有关的基本命题; 第 2 章讨论自相似集; 第 3 章讨论上凸密度; 第 4 章讨论自相似集的结构和有关问题. 在附录 A 中简单介绍必需的集合论、点集拓扑基础知识, 而附录 B 则介绍测度论基础知识. 作者将力求封闭性, 但阅读本书还是要有一定基础的, 如符号动力系统和分形的一些基础知识等. 国内外已有不少有关分形的著作出版, 如文献 [4 ~ 7] 等, 读者如能粗读其中的部分内容, 对阅读本书将是大有裨益的.

本书的写作得到了很多人的帮助, 特别是尹建东博士、李浩博士、梁超博士和刘耿博士, 他们在本书排版、制图和校对过程中给了作者极大帮助. 朱智伟博士对本书初稿做了大量校对工作, 纠正了大量排版错误. 此外, 陈仁莲博士、罗俊博士也给作者很大帮助. 我要特别感谢的是文兰教授、苏维宜教授、井竹君教授和吴敏教授, 他们给了作者热情的鼓舞, 并在百忙之中为本书作了热情洋溢的推荐, 使作者有勇气把本书最终完成.

作者自始至终得到国家自然科学基金委员会的大力支持, 这是要特别说明的.

本书的写作始于 2007 年上半年, 至今不到一年, 时间多少有些仓促. 加之作者曾被一位老同学讥为 “机盲”, 由 Word 转学 Latex, 耗去大量时间和精力, 写作过程中大部分时间都花在打字、排版、纠错和制图方面, 往往一个符号出错, 会使作

者半天之内焦头烂额、一筹莫展. 正因如此, 在细节斟酌上就显得不够. 加上水平有限, 错误和纰漏一定在所难免. 希望读者不吝赐教.

周作领

2008 年 2 月 29 日

目　录

第 1 章　维数与测度

分形 (fractal, 由拉丁文 fractus 演化而来, 意为 “破碎”、“碎片”), 如我们在第一版前言中所说, 或 “杂乱无章” 或涉及无限生成过程. Mandelbrot 曾给出 “试探性” (tentative) 的定义[4]:

(1) $\mathcal{H}$ 维数严格大于拓扑维数的集合 (图形) 称为分形.

但是, Mandelbrot 认为这样的定义并不适宜, 因为按这个定义, 一些高度不规则的对象将被排除在分形之外, 即它们相应的两个维数可能相等. 他后来收回这个定义, 于 1985 年给出另一个定义:

(2) 由部分组成的且每个部分均与整体相似的集合 (图形) 谓之分形.

按这个定义也可能把另外一些不规则的对象排除在外, 也不甚适宜. 到目前为止, 分形的统一定义尚未形成, 一般人们就把诸如 “具有非负实维数的集合”、“具有精细结构的集合” 以及 “不规则的集合” 等视为分形[5]. 不管怎样, 都涉及新的维数和相应的测度. 维数和测度有多种, 本书主要讨论 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度, 因此本章主要介绍这种维数和测度.

1.1　分形的例子

例 1.1.1　中间三分 Cantor 集.

这是读者在实变函数课中早已熟悉的内容, 是最简单的分形, 其构造如下: 在直线 R 上取单位线段, 记为 S_0; 把 S_0 三等分后去掉中间一段的内部 (叫做 1 湖), 得到两个长度为 $\frac{1}{3}$ 的线段 (叫做 1 基本线段或 1 岛) 组成的集合, 记为 S_1; 对 S_1 中的每一 1 基本线段重复上述程序, 并称去掉的两个线段的内部为 2 湖, 得到由四个长度为 $\frac{1}{9}$ 的 2 基本线段或 2 岛构成的集合, 记为 S_2. 这样的程序无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots$. 易见, S_i 由 2^i 个长度为 $\frac{1}{3^i}$ 的 2^i 基本线段构成 (各级湖共有 2^i-1 个). 非空集合

$$C=\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

就是中间三分 Cantor 集 (见图 1.1.1).

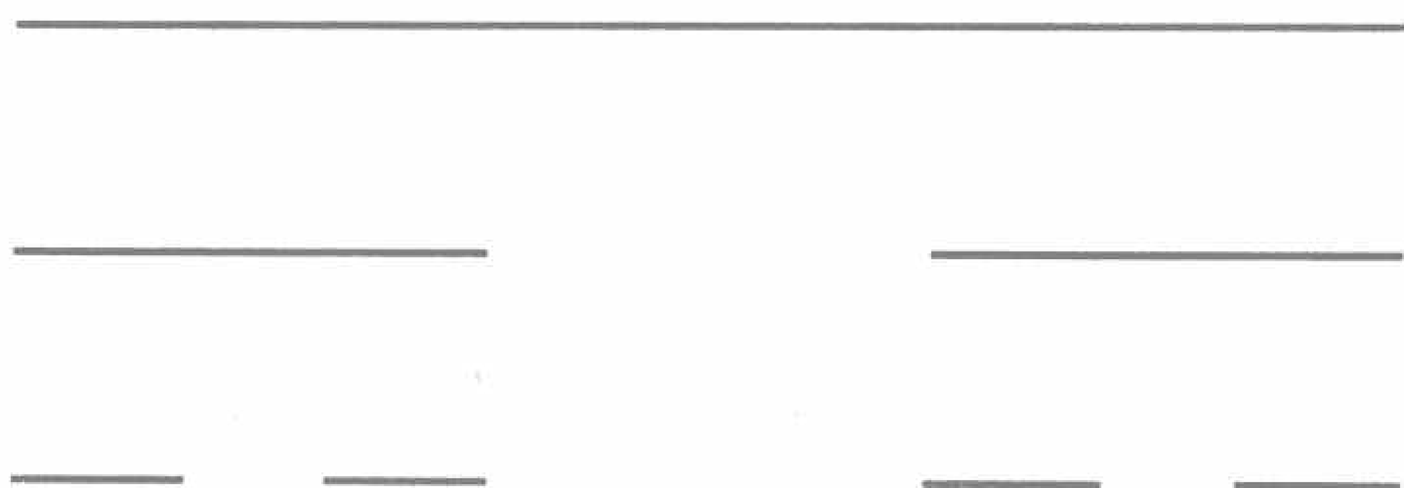


图 1.1.1 Cantor 集

例 1.1.2 Sierpinski 垫片.

在 R^2 上取单位正三角形, 记为 S_0; 分别连 S_0 三边的中点, 得到四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的三角形, 去掉中间一个的内部, 余下集合记为 S_1; 对 S_1 中每个小正三角形重复上述过程, 得到 S_2; 这样的过程无限进行下去, 得到 S_0, S_1, $S_2, \cdots$; 非空集合

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

即是 Sierpinski 垫片 (见图 1.1.2). 容易证明, 这是一个连通甚至弧式连通的集合.

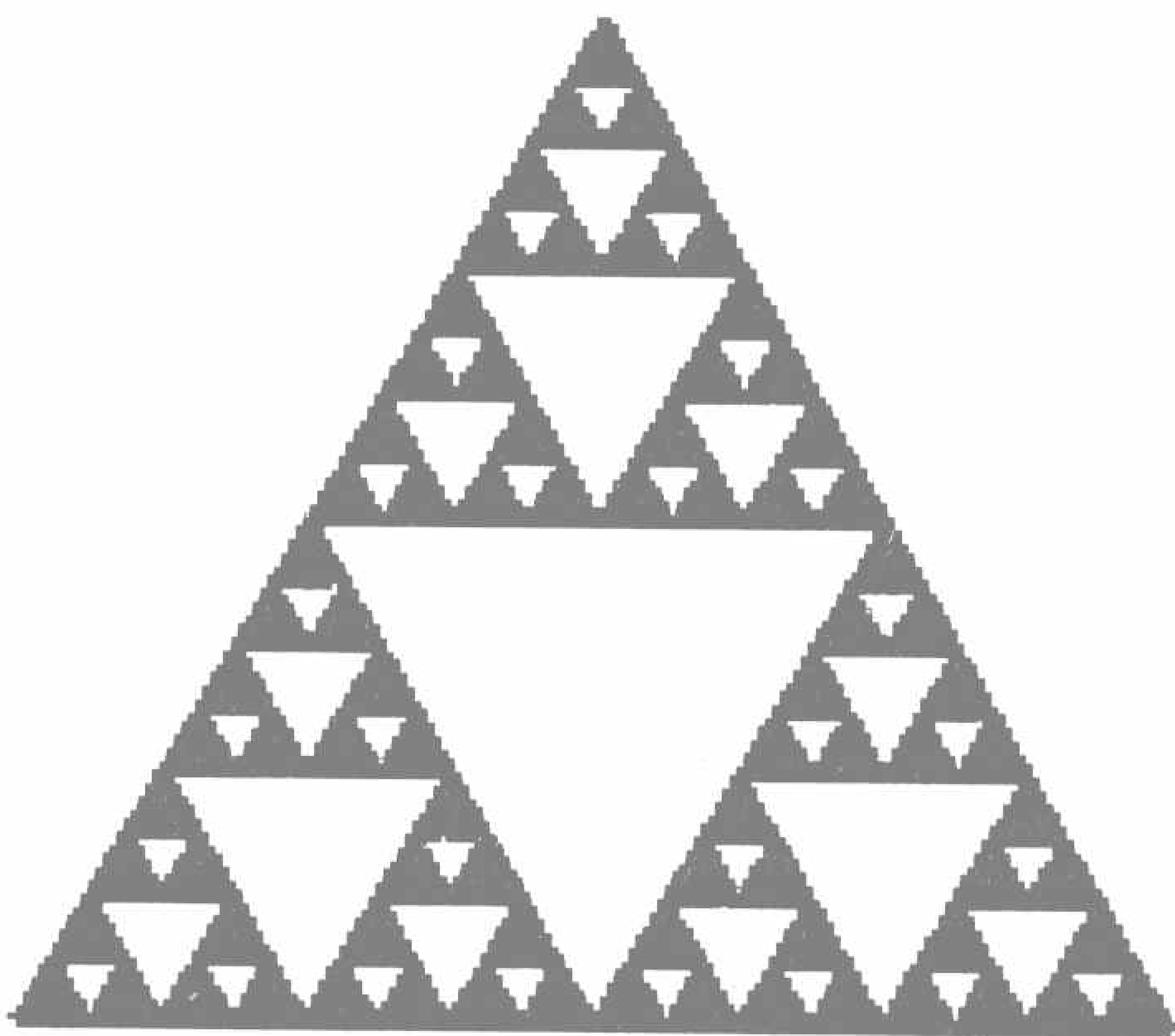


图 1.1.2 Sierpinski 垫片

例 1.1.3 Koch 曲线.

在 R^2 上取单位线段 K_0, 三等分后, 在中间一段上向上作正三角形并去掉底边的内部, 得到由四个长度为 $\frac{1}{3}$ 的线段构成的折线, 记为 K_1; 对 K_1 的每一线段重复上述过程 (作三角形时方向均向上). 这样的过程无限进行下去, 得到 K_0, K_1, $K_2, \cdots$. 易见, 在 Hausdorff 度量下, 存在极限

$$K_i \underset{\mathcal{H}}{\rightarrow} K,$$

K 即是 Koch 曲线 (见图 1.1.3). 可以证明, Koch 曲线, 甚至其上任意两点之间均有无限的欧氏长度.

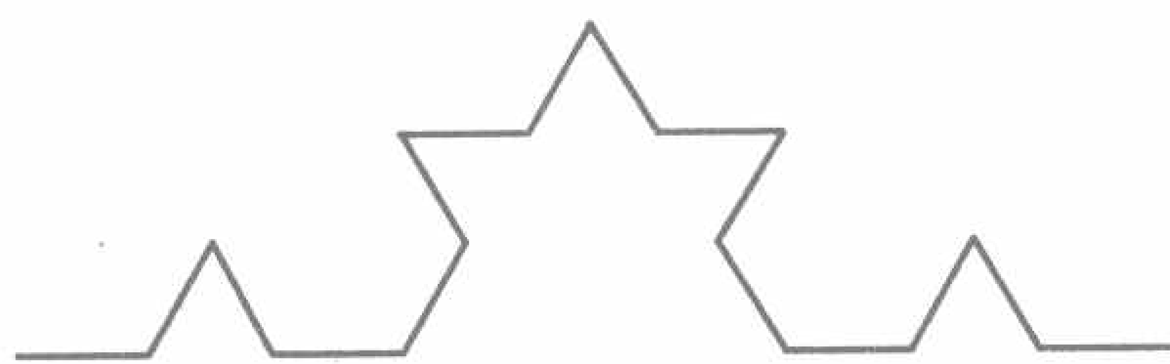


图 1.1.3 Koch 曲线

例 1.1.4 $C \times C$, 亦称 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯, 其中 C 为中间三分 Cantor 集.

$C \times C$ 亦可按下述方式得到. 在 R^2 上取单位正方形 S_0, 每边三等分后, 分别连对边的对应分点, 得到 9 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形, 去掉中间的 5 个小正方形的并的内部后记为 S_1. 对 S_1 的每一个小正方形重复上述过程, 得到 S_2; 这样的过程无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, \cdots$, 非空集合 $S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ 即是 $C \times C$(见图 1.1.4(a)). $C \times C$ 亦称为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯.

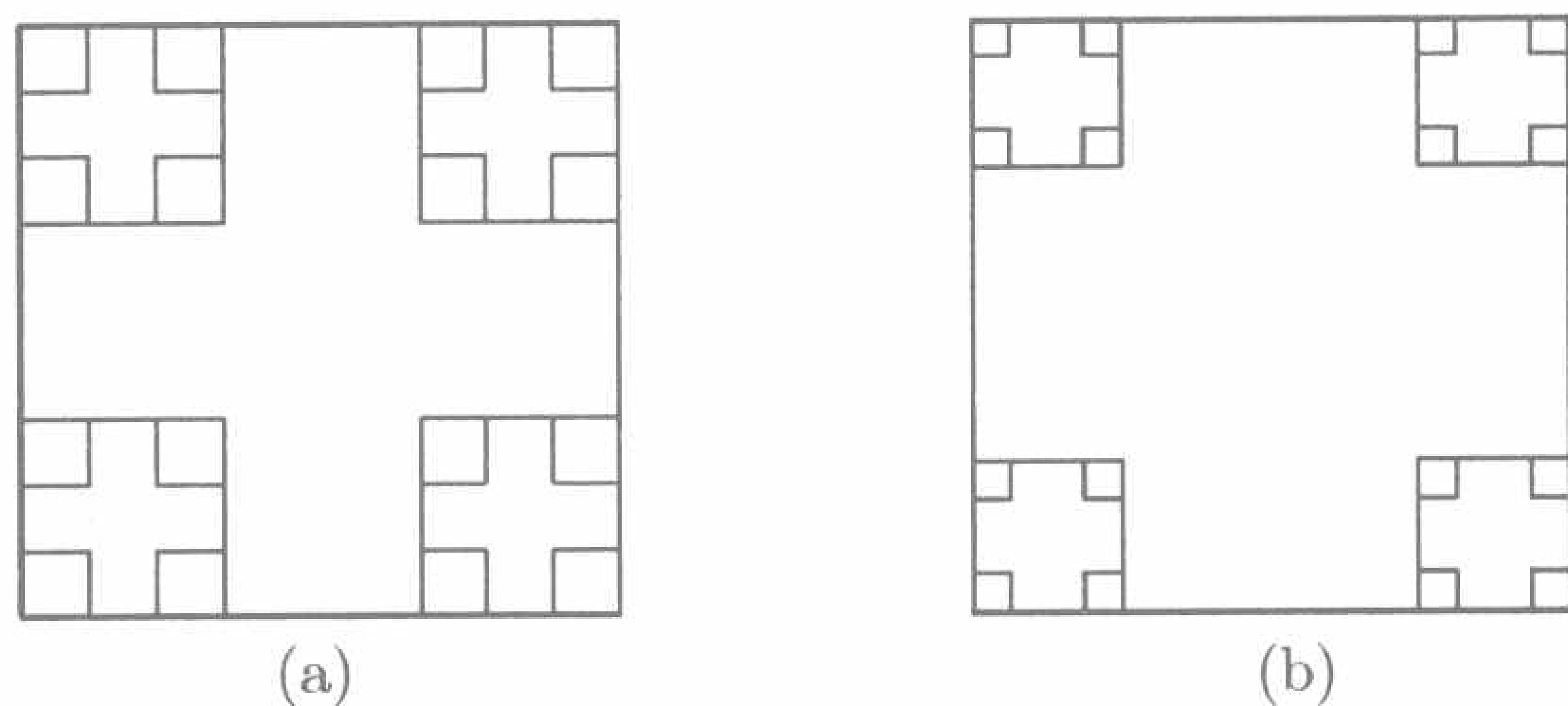


图 1.1.4 (a) $C \times C$; (b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯

例 1.1.5 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$- Sierpinski 地毯.

在 R^2 中, 把单位正方形 S_0 每边四等分, 分别连对边对应分点, 得到 16 个边长为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形, 去掉中间的 12 个的并的内部, 记为 S_1; 对 S_1 的每个小正方形, 重复上述过程, 并无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, \cdots$, 非空集合

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

即是所求 (见图 1.1.4(b)).

还可以举出很多这样的例子. 这些例子具有分形的两个特征, 即具有精细的结构, 也都是涉及无限过程而生成. 它们更深入的性质, 将在以后的章节中陆续展开, 这里不多作讨论. 这些例子还有其他分形将是本书很重要的讨论对象.

1.2 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度

在 $R^n(n > 0)$ 上取通常度量 d, $d(x, y)$ 或 $|x - y|$ 表两点的距离, 而集合 $A \subset R^n$

的直径记为

$$|A| = \sup\{d(x,y), \forall x, y \in A\}.$$

设 $E \subset R^n$, $\alpha = \{U_i, i > 0\}$ 是 E 的一个 (可数) 覆盖, 即 $E \subset \bigcup_{i>0} U_i$. 设 $\delta > 0$, 并称 α 是 E 的一个 δ 覆盖, 如果

$$E \subset \bigcup_{i>0} U_i, \quad 0 < |U_i| \leqslant \delta, \quad \forall i > 0.$$

设 $s \geqslant 0, \delta > 0$. 定义

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geqslant 0,$$

这里 inf 是对所有 E 的 δ 覆盖取下确界. 易于验证 $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ 是 R^n 的一个度量外测度. 定义

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) r \geqslant 0.$$

易见 $\mathcal{H}^s(E)$ 存在但可能无限大. $\mathcal{H}^s$ 也是一个度量外测度, 但是限制在 R^n 的 Borel σ 代数上, 是一个测度, 称作 E 的 s 维 Hausdorff 测度.

值得注意的是, 在上述定义中, 限制取凸覆盖时 (即 α 中每一成员均为凸集, 以下类似), 所得结果完全一样; 限制取开 (闭) 覆盖时, $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ 可能不同, $\mathcal{H}^s(E)$ 不变; 但限制取固定形状, 如都取球形, 则得到不同的测度[5].

从上述定义易见, 当 s 从 0 到 ∞ 递升时, $\mathcal{H}^s(E)$ 是不升的. 进而, 若 $s < t$, 则

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \geqslant \delta^{s-t} \mathcal{H}^t_\delta(E).$$

很容易看出, 这又蕴涵当 $0 < \mathcal{H}^t(E)$ 时, $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. 因此有

断言　存在唯一的实数, 记作 $\dim_{\mathcal{H}}(E)$, 满足

$$\mathcal{H}^s(E) = \infty, \quad \text{如果 } 0 \leqslant s < \dim_{\mathcal{H}}(E);$$
$$\mathcal{H}^s(E) = 0, \quad \text{如果 } \dim_{\mathcal{H}}(E) < s < \infty.$$

也可写成

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\},$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty, & \text{如果 } s < \dim_{\mathcal{H}}(E), \\ 0, & \text{如果 } s > \dim_{\mathcal{H}}(E). \end{cases}$$

称实数 $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ 为 E 的 Hausdorff 维数, 一般总是记作 $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$, 而所谓 E 的 Hausdorff 测度则总是指它的 s 维 Hausdorff 测度. 一般而言, $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ 已不

再是整数, 甚至不再是分数, 但可以为 0 和 ∞. 为了简便, 本书以后分别用 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度表示 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度.

注释和基本性质 (1) 满足条件 $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ 的可测集 E 称作 s 集. 显然 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 这样的分形大量存在. 本书主要研究对象满足开条件的自相似集都是 s 集.

(2) 在 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度的定义中, 可以用凸覆盖、开覆盖或闭覆盖, 结果不变; 再者, $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度不是相容度量不变量, 即对 R^n 的两个不同相容度量, 相应的值一般不同.

(3) 单调性. 设 $E, F \subset R^n$, 则

$$E \subset F \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(E) \leqslant \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

从测度的基本性质, $\mathcal{H}^s(E) \leqslant \mathcal{H}^s(F), \forall s \geqslant 0$. 再从 $\mathcal{H}$ 维数的定义, 立得所求.

(4) 可数稳定性. 设 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 R^n 中集合序列, 则

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i>0} F_i\right) = \sup_{i>0}\{\dim_{\mathcal{H}}(F_i)\}.$$

据单调性, $\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i>0} F_i\right) \geqslant \dim_{\mathcal{H}}(F_i), \forall i > 0$. 再者, 如果 $s > \dim_{\mathcal{H}}(F_i), \forall i > 0$, 据定义, $\mathcal{H}^s(F_i) = 0, \forall i > 0$, 再据测度的可数可加性, 那么得 $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i>0} F_i\right) = 0$, 这蕴涵相反的不等式.

(5) 可数集. 设 F 可数, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$. 因为若 F_i 为单点集, 显然 $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$, 因而 $\dim_{\mathcal{H}}(F_i) = 0$, 据可数稳定性立得所求. 再者, 若 F 有限, 则 $\mathcal{H}^0(F) = \mathrm{card}\{F\}$. 易从定义出发直接证明, 从略.

(6) Hölder, Lipschitz 和双 Lipschitz 映射. 称 $f: F \to R^n$ 满足 Hölder 条件, 并称为 Hölder 映射, 如果存在常数 $c > 0, \alpha > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in F.$$

则

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F), \quad \dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leqslant \frac{1}{\alpha}\dim_{\mathcal{H}}(F).$$

令 $\{U_i\}$ 是 F 的 δ 覆盖, 由假设有

$$|f(F) \cap U_i| \leqslant c|U_i|^{\alpha},$$

因而 $\{f(F \cap U_i)\}$ 是 $f(F)$ 的 $c\delta^{\alpha}$ 覆盖, 故

$$\sum_{i>0} |f(F) \cap U_i|^{s/\alpha} \leqslant c^{s/\alpha} \sum_{i>0} |U_i|^s,$$

因而

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_{c\delta^\alpha}(F).$$

令 $\delta \to 0$, 从而 $c\delta^\alpha \to 0$, 得

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

和

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leqslant \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

当 $\alpha = 1$ 时, 即

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \quad \forall x, y \in F,$$

称为 Lipschitz 条件, f 称为 Lipschitz 映射. 这时有

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant \mathcal{H}^s(F), \quad \dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leqslant \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

若存在 $0 < c_1 < c$, 使得

$$c_1|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|, \quad \forall x, y \in F,$$

则称 f 为双 Lipschitz 映射. 这时有 $\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) = \dim_{\mathcal{H}}(F)$. 注意到, 双 Lipschitz 映射有逆映射 $f^{-1} : f(F) \to F$, 应用上面结果即得

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) = \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

但是

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$$

一般不成立.

(7) 缩放比例性质. 设 $\lambda > 0$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 即 E 的比例为 λ 的相似缩放, 则

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s\mathcal{H}^s(E).$$

设 $\{U_i\}$ 是 E 的一个 δ 覆盖, 则 $\{\lambda U_i\}$ 是 λE 的 $\lambda\delta$ 覆盖, 因此

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda E) \leqslant \sum_i |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s \leqslant \lambda^s\mathcal{H}^s_\delta(\lambda E), \quad \forall \delta > 0.$$

令 $\delta \to 0$, 得 $\mathcal{H}^s(\lambda E) \leqslant \lambda^s\mathcal{H}^s(E)$. 用 $\dfrac{1}{\lambda}$ 代替 λ, 可得相反方向的不等式.

(8) 质量分布原理. 设 μ 是 F 上的一个质量分布, 并设对某个 s, 存在 $c>0,\delta>0$, 使得 $\mu(U)\leqslant c|U|^s$ 对所有子集 $U,|U|\leqslant\delta$ 成立. 则

$$\mathcal{H}^s(F)\geqslant\frac{\mu(F)}{c},\quad s\leqslant\dim_{\mathcal{H}}F.$$

如果 U_i 是 F 的任意覆盖, 那么

$$0<\mu(F)=\mu\left(\bigcup_i U_i\right)\leqslant\sum_i\mu(U_i)\leqslant c\sum_i|U_i|.$$

取下确界, 如果 δ 充分小, 得 $\mathcal{H}^s(F)\geqslant\dfrac{\mu(F)}{c}$, 因此 $\mathcal{H}^s(F)\geqslant\dfrac{\mu(F)}{c}$. 证毕.

这个结果是估计 $\mathcal{H}$ 测度下界的有力工具.

$\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度还有很多其他性质, 这里不再一一列举. 作为本节的结束, 下面计算中间三分 Cantor 集 C 的 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度.

$$\dim_{\mathcal{H}}(C)=s,\quad\mathcal{H}^s(C)=1,$$

这里[5] $s=\log_3 2$.

据例 1.1.1, S_i 由 2^i 个长度为 $\dfrac{1}{3^i}$ 的线段构成, 它们显然是 C 的一个 $\dfrac{1}{3^i}$ 覆盖, 因此 $\mathcal{H}^s_{\frac{1}{3^i}}(C)\leqslant 2^i\times\dfrac{1}{2^i}=1\left(\text{注意, }\left(\dfrac{1}{3^i}\right)^{\log_3 2}=\dfrac{1}{2^i}\right)$. 令 $i\to\infty$, 得 $\mathcal{H}^s(C)\leqslant 1$.

下面证明 $\mathcal{H}^s(C)\geqslant 1$. 设 α 是 C 上的一个由开区间构成的覆盖, 先证明

$$1\leqslant\sum_{I\in\alpha}|I|^s.\tag{1.2.1}$$

据 C 的紧致性, 可设 α 是有限的. 取 α 的每一成员的闭包后, 得到 C 的一个有限闭区间覆盖, 亦用 α 表示. 据 Lebesgue 数定理, 存在 $j>0$, 使得每一个 j 基本线段都包含在 α 的一个成员内 (见附录 A), 因此, 可设 α 中不含长度小于 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^j$ 的成员, 也不含不包含任何 j 基本线段的成员. 设 $I\in\alpha$. 如果 I 的左端点落在某个 j 基本线段的内部, 显然还有 α 的另一成员包含这个 j 基本线段. 取与这个 j 基本线段右侧相邻的另一个 j 基本线段 (肯定存在) 的左端点为 I 的左端点. 对 I 的右端点可同样处理. 用新得到的线段代替 I, 依然是 C 的覆盖且 (1.2.1) 式右端不增. 对每一个 $I\in\alpha$ 都作这样的替换, 得到一个新的覆盖, 还用 α 表示. 这时, α 的成员有两种可能, 或是某一个 j 基本线段, 或是包含若干 j 基本线段, 且其左、右端点分别是两个 j 基本线段的左、右端点. 在第二种情况, 设这些 j 基本线段从左到右依次为 $J_1, J_2,\cdots,J_k$, $3\leqslant k\leqslant 2^j$. 在 J_1, J_k 之间共有 $k-1$ 个湖, 记这些湖的

总长度为 K, 并记 $J = J_2 \cup \cdots \cup J_k$. 显然 $I \supset J_1 \cup J \cup K$, 且由例 1.1.1 容易证明, $\frac{1}{2}(|J|+|J_1|) \leqslant |K|$. 于是

$$\begin{aligned}|I|^s &\geqslant (|J_1|+|J|+|K|)^s \geqslant \left(\frac{3}{2}(|J_1|+|J|)\right)^s \\ &\geqslant 3^s\left(\frac{1}{2}|J_1|+|J|\right)^s \geqslant 2\left(\frac{1}{2}|J_1|^s+\frac{1}{2}|J|^s\right) \\ &= |J_1|^s+|J|^s,\end{aligned}$$

这里利用了 $3^s = 2$ 和凹函数 x^s 的性质[21]. 易见, 在 α 中用 J_1 和 J 代替 I, 依然是 C 的覆盖且 (1.2.1) 式右端不增. 这样的过程经过 $k-1$ 次, I 已被 $J_1, J_2, \cdots, J_k$ 代替, 但依然是 C 的覆盖, 且 (1.2.1) 式右端不增. 对 α 中所有第二种情形的 I 实施上述程序, 经过有限次后, 得到 C 的一个新覆盖, 它全由 j 基本线段构成, 显然, 这个新覆盖由全部 2^j 个 j 基本线段构成. 由 $\left(\frac{1}{3^i}\right)^s = \frac{1}{2^i}$, (1.2.1) 式右端等于 1, 即 (1.2.1) 式成立. 再令 $j \to \infty$, 即得 $\mathcal{H}^s(C) \geqslant 1$. 证毕.

上述证明并不简单. 这仅仅是对比较简单的 C, 一般情形的证明可想而知. 计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度是本书重点之一, 以后章节将逐步展开讨论.

1.3　盒维数, 填充维数与测度

除 $\mathcal{H}$ 维数外, 还有其他亦有广泛应用的维数可以定义, 其中尤以盒维数和填充 (packing) 维数为重要, 而且它们与 $\mathcal{H}$ 维数有较密切的关系. 但本书将主要讨论 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度, 与这些维数关系不大, 因此只简单介绍它们, 有些结果略去证明, 有兴趣的读者可参阅文献 [5~7]. 我们先讨论盒维数, 与 $\mathcal{H}$ 测度不同的是这个维数不能形成测度.

设 $F \subset R^n$ 为非空有界子集, $n > 0$. 记 $N_\delta(F)$ 为直径不超过 $\delta > 0$ 可以覆盖 F 的集合的最小基数.

定义 1.3.1

$$\begin{cases}\overline{\dim}_B F = \overline{\lim\limits_{\delta\to 0}} \dfrac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}, \\ \underline{\dim}_B F = \underline{\lim\limits_{\delta\to 0}} \dfrac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}\end{cases} \tag{1.3.1}$$

分别称为 F 的下、上盒维数. 如果它们相等, 称其共同值为 F 的盒维数, 记为

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

可以证明, $N_\delta(F)$ 可以是下述四个中的任一个, 结果相同:

(1) 覆盖 F 的半径为 δ 的最少闭球基数;

(2) 覆盖 F 的边长为 δ 的最少立方体基数;

(3) 覆盖 F 的直径最大为 δ 的集合的最少基数;

(4) 球心在 F 半径为 δ 的相互不交的球的最大基数.

盒维数有如下的性质:

(1) $\underline{\lim}_B F, \overline{\lim}_B F$ 是单调的, 即如果 $E \subset F$, 那么 $\underline{\lim}_B E \leqslant \underline{\lim}_B F, \overline{\lim}_B E \leqslant \overline{\lim}_B F$;

(2) $\overline{\lim}_B F$ 是有限稳定的, 即 $\overline{\lim}_B (E \cup F) = \max\{\overline{\lim}_B E,\ \overline{\lim}_B F\}$, 但下盒维数无此性质;

(3) 下、上盒维数都是 Lipschitz 稳定的, 而且它们在双 Lipschitz 和 Höder 变换下不变, 证明简单, 从略;

(4) $\underline{\lim}_B F = \underline{\lim}_B \bar{F}, \overline{\lim}_B F = \overline{\lim}_B \bar{F}$, 证明简单, 从略;

(5) $\dim_H(F) \leqslant \underline{\lim}_B F \leqslant \overline{\lim}_B F$. 这是我们感兴趣的结果. 如果 F 可以由 $N_\delta(F)$ 个直径为 δ 的集合覆盖, 易由定义得到 $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leqslant N_\delta(F)\delta^s$. 如果 $1 < \mathcal{H}^s(\mathcal{F}) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, 只要 δ 充分小, 那么就有 $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$, 即

$$s \leqslant \lim_{\delta \to 0} \log N_\delta(F)/(-\log \delta),$$

所以

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) \leqslant \underline{\lim}_{B} F \leqslant \overline{\lim}_{B} F$$

对任意的 $F \subset R^n$ 成立. 一般等号不成立, 但本书讨论的满足开集条件的自相似集则成立. 关于盒维数更详尽的讨论见文献 [6].

下面介绍填充维数与测度、中心测度.

设 $s \geqslant 0, F \subset R^n$. 定义

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \left\{ \sup \sum_i |B_i|^s \right\},$$

其中 B_i 是中心在 F 内、直径不大于 $\delta > 0$ 的球, 且 $B_i \bigcap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. 易见, $\mathcal{P}_\delta^s(F)$ 随 δ 而下降的, 故极限

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{P}_\delta^s(F)$$

存在. 容易看出, $\mathcal{P}_0^s(F)$ 不是测度, 这只要考虑可数稠密集即可看出. 有时称 $\mathcal{P}_0^s(F)$ 为 F 的 (填充) 预测度. 为了便于研究, 如下修改预测度的定义:

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{s} F_i \right\}.$$

容易证明, $\mathcal{P}^s(F)$ 是 R^n 上的一个测度, 称为 F 的 s 维填充测度或填充测度. 定义填充维数如下:

$$\dim_P(F) = \sup\{\mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf\{\mathcal{P}^s(F) = 0\}.$$

若把上述填充改成覆盖, 则可以得到中心测度. 同样设 $s \geqslant 0$, $F \subset R^n$, 并设 $\{B(x_i, r_i), i > 0\}$ 是 F 的一个中心均在 F 上直径均不大于 δ 的球覆盖, 称作 F 的中心球 δ 覆盖. 定义

$$\mathcal{C}_0^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^s \right\},$$

其中的下确界是对取遍 F 的所有中心球 δ 覆盖而言. 容易看到, 它也不是测度, 称其为 F 的 Hausdorff 中心预测度. 如下修改这个定义:

$$\mathcal{C}^s(F) = \sup\{\mathcal{C}_0^s(E) : E \subset F\},$$

容易看出, 这已经是一个测度了, 称之为 F 的 Hausdorff 中心测度.

填充测度和中心测度的计算也是非常困难的, 但比较起来, Hausdorff 测度更本质, 本书的重点是 Hausdorff 测度, 我们不过多讨论这两种测度, 有兴趣的读者可参阅文献 [12, 46, 47].

1.4 Vitali 覆盖定理, Lebesgue 测度

$\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度是通过覆盖定义的, 而 Vitali 覆盖定理是非常重要的工具, 在几何测度论中有很多应用. 本节先讨论这个定理, 然后讨论 Lebesgue 测度与 Hausdorff 测度的关系. 下面先证明一个引理.

引理 1.4.1 *设 E 可测, 且 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s, \mathcal{H}^s(E) < \infty$, 又设 $\varepsilon > 0$. 则存在仅依赖 E 和 $\varepsilon > 0$ 的 $\rho > 0$, 使得对可测集合族*

$$\{U_i\}_1^\infty, \quad 0 < |U_i| \leqslant \rho,$$

有

$$\mathcal{H}^s\left(E \cap \bigcup_i U_i\right) < \sum_i |U_i|^s + \varepsilon.$$

证明 从 $\mathcal{H}$ 测度的定义, 可以选择 $\rho > 0$ 和 E 的任意的 ρ 覆盖 $\{W_i\}$ 使得

$$\mathcal{H}^s(E) < \sum_i |W_i|^s + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

给定可测集 $\{U_i\}, 0<|U_i|\leqslant\rho$, 可以得到 $E-\bigcup_i U_i$ 的 ρ 覆盖 $\{V_i\}$, 使得

$$\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_i U_i\right)+\frac{1}{2}\varepsilon>\sum_i |V_i|^s.$$

因为 $\{U_i\}\cup\{V_i\}$ 是 E 的 ρ 覆盖, 故

$$\mathcal{H}^s(E)<\sum|U_i|^s+\sum|V_i|^s+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s\left(E\cap\bigcup_i U_i\right)&=\mathcal{H}^s(E)-\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_i U_i\right)\\&<\sum|U_i|^s+\sum|V_i|^s-\frac{1}{2}\varepsilon-\sum|V_i|^s-\frac{3}{2}\varepsilon\\&=\sum|U_i|^s+\varepsilon.\end{aligned}$$

□

定义 1.4.2 设 $E\subset R^n$. 集合族 $\mathcal{V}$ 称作 E 的一个 Vitali 类, 如果 $\forall x\in E$, $\delta>0$, 存在 $U\in\mathcal{V}$, 使得 $x\in U, 0<|U|\leqslant\delta$.

定理 1.4.3 设 E 可测且 $\dim_{\mathcal{H}}(E)=s$, $\mathcal{V}$ 是 E 的一个由闭子集构成的 Vitali 类, 则有

(1) 可以从 $\mathcal{V}$ 中选出有限或可数个两两不相交的序列 $\{U_i\}$ 使得

$$\sum_i |U_i|^s=\infty$$

或

$$\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_i U_i\right)=0;$$

(2) 当 $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 还有

$$\mathcal{H}^s(E)\leqslant\sum_i |U_i|^s+\varepsilon.$$

证明 [5] 取定 $\rho>0$. 显然可设 $|U|\leqslant\rho, \forall U\in\mathcal{V}$. 下面归纳地选取 $\{U_i\}$. 设 $U_1\in\mathcal{V}$, $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 已选定, 并设

$$d_m=\sup\{|U|, U\in\mathcal{V}, U\cap U_i=\varnothing, i=1,2,\cdots,m\}.$$

如果 $d_m = 0$, 那么 $E \subset \bigcup\limits_1^m U_i$. 下设

$$U_{m+1} \in \mathcal{V}, \quad U_{m+1} \bigcap \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right\} = \varnothing, \quad |U_{m+1}| \geqslant \frac{1}{2} d_m.$$

继续归纳过程, 并设 $\sum |U_i|^s < \infty$. 对每一个 i, 设 B_i 表示中心在 U_i 内半径为 $3|U_i|$ 的球. 我们断言

$$\left(E - \bigcup_1^k U_i \right) \subset \bigcup_{k+1}^{\infty} B_i, \quad \forall k > 1.$$

如果 $x \in E - \bigcup\limits_1^k U_i$, 存在 $x \in U \in \mathcal{V}$ 不与 U_i 相交, $i = 1, 2, \cdots, m$. 因为 $|U_i| \to 0$, 存在 m, 使得 $|U| > 2|U_m|$. 据 $\{U_i\}$ 的选择, U 与某个 U_i 相交不空, $k < i < m$ 且 $|U| \leqslant 2|U_i|$. 由初等几何可知 $U \subset B_i$, 这就完成了上述断言的证明. 所以, 如果 $\delta > 0$, 只要 k 充分大, 使得 $|B_i| \leqslant \delta, \forall i > k$, 就有

$$\mathcal{H}_\delta^s \left(E - \bigcup_1^{\infty} U_i \right) \leqslant \mathcal{H}_\delta^s \left(E - \bigcup_1^{k} U_1 \right) \leqslant \sum_{k+1}^{\infty} |B_i|^s = 6^s \sum_{k+1}^{\infty} |U_i|^s.$$

因此

$$\mathcal{H}_\delta^s \left(E - \bigcup_1^{\infty} U_i \right) = 0, \quad \forall \delta > 0,$$

所以 $\mathcal{H}^s(E - \bigcup\limits_1^{\infty} U_i) = 0$. 这就完成了定理前半部分的证明.

为了证明定理的后半部分, 选择引理 1.4.1 中对应 ε 和 E 的那个 ρ. 如果 $\sum |U_i|^s = 0$, 那么结论是显然的. 否则, 据引理的前半部分和引理 1.4.1,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(E) &= \mathcal{H}^s \left(E - \bigcup_i U_i \right) + \mathcal{H}^s \left(E \cap \bigcup_i U_i \right) \\ &= 0 + \mathcal{H}^s \left(E \cap \bigcup_i U_i \right) < \sum_i |U_i|^s + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

下面讨论 Lebesgue 测度 (简称 $\mathcal{L}$ 测度) 和 $\mathcal{H}$ 测度的关系. 容易看出 $\mathcal{L}^1$ 和 $\mathcal{H}^1$ 是相同的. 那么 $\mathcal{L}^n$ 和 $\mathcal{H}^n$ 有什么关系吗? 这里 $n > 1$. 本节回答这个问题. 为此, 先证明一个著名的几何结果: 优化问题, 但只证明 2 维的情形, 高维情形类似.

定理 1.4.4 平面上, 直径为 $t > 0$ 的凸集, 实心圆包含的面积最大, 即设 A 是直径为 t 的凸集, 则

$$\mathcal{L}^2(A) \leqslant \frac{t^2 \pi}{4},$$

这里 $\dfrac{t^2\pi}{4}$ 是直径为 t 的实心圆的面积.

证明 证明方法不止一个, 下面的证明亦可参见文献 [4].

任取 A 的一个边界点 x, 过 x 引一直线作为 x 轴, 使得 A 在 x 轴的上面, 并以 x 为极点, 建立极坐标系 (r,θ)(见图 1.4.1).

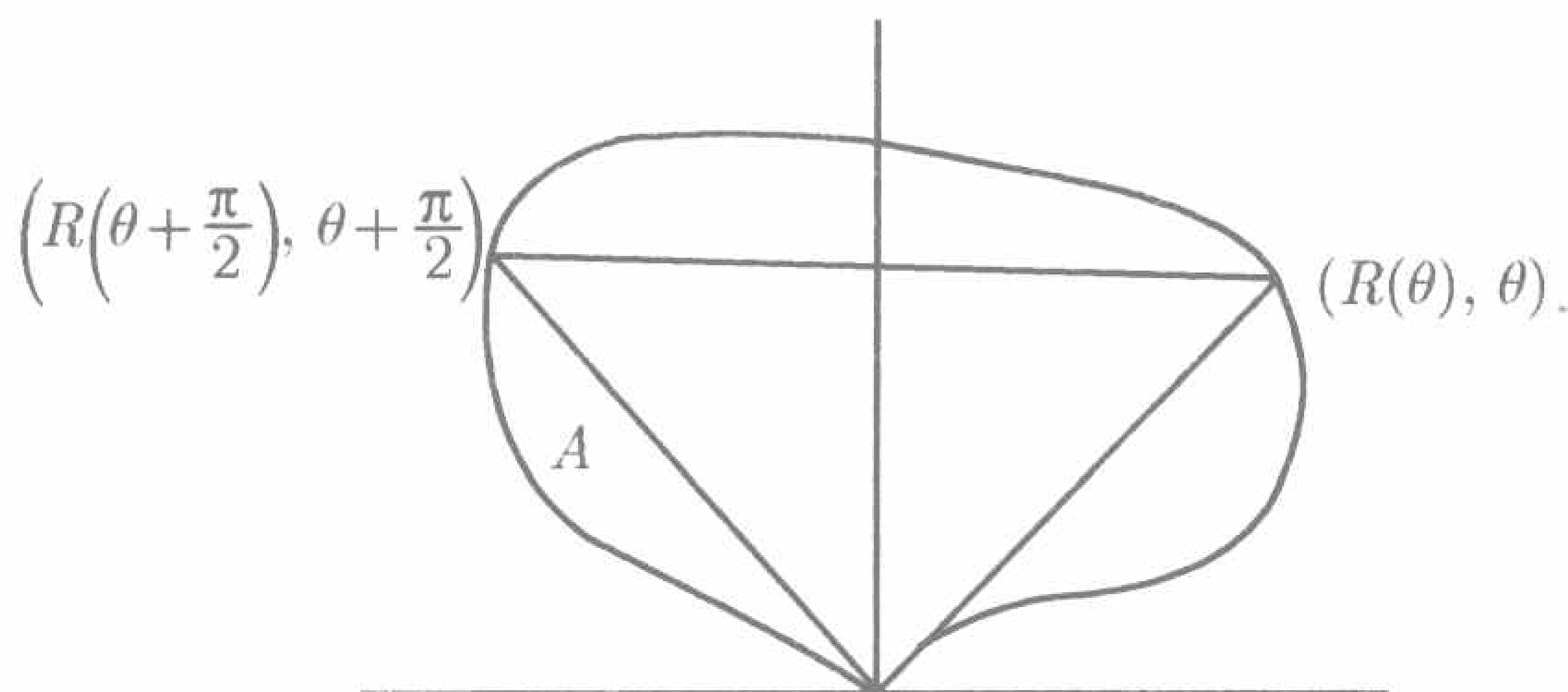


图 1.4.1 极坐标系

设 A 的边界的极坐标方程为

$$0\leqslant r\leqslant R(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

显然, 点

$$(R(\theta),\theta),\quad \left(R\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

的距离不大于 t, 因此

$$R(\theta)^2+R\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)^2\leqslant t^2.$$

在极坐标中 A 包围的面积为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{R(\theta)^2}{2}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R(\theta)^2}{2}\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{R(\theta)^2}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R(\theta)^2+R\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi t^2}{4}.\end{aligned}$$

这就证明了 $\mathcal{L}^2(A)\leqslant\dfrac{t^2\pi}{4}$. 特别地, 当 $t=1$ 时, 有 $\mathcal{L}^2(A)\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, 其中 $\dfrac{\pi}{4}$ 是直径为 1 的圆的 Lebesgue 测度, 即面积. □

下面证明 $\mathcal{L}^2$ 测度和 $\mathcal{H}^2$ 测度的一般关系.

引理 1.4.5 设 $B\subset R^2$ 为可测集, 则存在 $0<a\leqslant b$, 使得

$$a\mathcal{L}^2(B)\leqslant\mathcal{H}^2(B)\leqslant b\mathcal{L}^2(B).$$

证明 设 $\mathcal{Q} = [0,1] \times [0,1]$ 为单位正方形, 并记 $b = \mathcal{H}^2(\mathcal{Q})$(容易证明 $b < \infty$). 如果

$$B = r\mathcal{Q} = [0,r] \times [0,r],$$

那么 $\mathcal{H}^2(B) = r^2\mathcal{H}^2(\mathcal{Q}) = r^2 b = b\mathcal{L}^2(B)$. 显然, 这个结论对任意正方形成立. 其次, 如果 B 是长方形, 用正方形去逼近它, 那么上述结论亦成立. 对一般的 B, 据文献 [3], 可得 $b\mathcal{L}^2(B) \geqslant \mathcal{H}^2(B)$.

设 $a = 1/\mathcal{L}^2(B_1(0)) = 1/\pi$, 其中 $B_1(0)$ 为半径为 1 的圆. 如果 $B \subseteq R^2$ 的直径为 r, 那么其包含在一个半径为 r 的圆 $B_r(x)$ 内, 且

$$\mathcal{L}^2(B) \leqslant \mathcal{L}^2(B_r(x)) = r^2\mathcal{L}^2(B_1(x)) = r^2/a.$$

由此, 同样据文献 [4] 可得, 对任意的 B, 有

$$a\mathcal{L}^2(B) \leqslant \mathcal{H}^2(B),$$

即

$$\frac{1}{\pi}\mathcal{L}^2(B) \leqslant \mathcal{H}^2(B).$$

事实上, 还可以改进为

$$\frac{4}{\pi}\mathcal{L}^2(B) \leqslant \mathcal{H}^2(B).$$

□

定理 1.4.6 设 $B \subseteq R^2$ 是可测集, 则 $\mathcal{H}^2(B) = (4/\pi)\mathcal{L}^2(B)$.

证明 据引理 1.4.5, 有 $(4/\pi)\mathcal{L}^2(B) \leqslant \mathcal{H}^2(B)$. 为了估计上限, 需要用到 Vitali 覆盖定理. 设 $b = \mathcal{H}^s(Q)$, 其中 Q 是开单位正方形. 任意圆盘可以用小正方形逼近, 用类似引理 1.4.5 的讨论可以证明, 对任意圆盘 B 有

$$\mathcal{H}^s(B) = b\mathcal{L}^2(B).$$

所有包含在 Q 内的直径小于 ε 的闭圆盘满足 Vitali 定理的假设, 故存在两两不交的 $\{B_i, i>0\}$ 使得 $\mathcal{L}^2(Q - \bigcup_i B_i) = 0$. 据

$$\mathcal{H}^2(B) \leqslant b\mathcal{L}^2(B),$$

有

$$\mathcal{H}^2\left(Q - \bigcup_{i>0} B_i\right) = 0,$$

因而

$$\mathcal{H}^2_\varepsilon\left(Q - \bigcup_{i>0} B_i\right) = 0.$$

现在

$$\mathcal{H}^2\left(\bigcup_{i>0} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi}{4}|B_i|^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^2(B_i) = \frac{4}{\pi}\mathcal{L}^2(Q) = \frac{4}{\pi}.$$

所以

$$b = \mathcal{H}^2(Q) = \mathcal{H}^2\left(\bigcup_{i>0} B_i\right) \leqslant \frac{4}{\pi}.$$

至此, 得到 $\mathcal{H}^2(B) = \dfrac{4}{\pi}\mathcal{L}^2(B)$ 对所有可测集 B 成立. □

对高维情形有类似的结果. 设 $B \subset R^n$, $n > 1$ 可测, 则

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}^n(B),$$

其中 $c_n = \pi^{\frac{n}{2}}/2^n\left(\dfrac{n}{2}\right)!$ 是直径为 1 的 n 维球的体积或 Lebesgue 测度[4,5].

第2章 自相似集

从本章起开始进入本书的主题, 即关于自相似集的讨论. 自相似集是具有分形的两个特点: 精细结构和涉及无限生成过程的最简单的一类分形, 满足开集条件的自相似集的 $\mathcal{H}$ 维数计算问题已获圆满解决, 但 $\mathcal{H}$ 测度计算和估计问题则远非如此, 除少数像中间三分 Cantor 集等部分 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的和整数维的外, 只有部分估计结果, 而在本书之前, 准确值计算和估计基本上是一片空白.

2.1 自相似集的生成

2.1.1 压缩函数系, 不变集

设 $D \subset R^n$ 是有界闭子集, $S: D \to D$ 是一个映射. 如果存在 $c > 0$, 使得

$$|S(x) - S(y)| \leqslant c|x - y|, \quad \forall x, y \in D,$$

就称 S 是 D 上的一个压缩映射, 显然, 压缩映射是连续的, 其中 c 称为压缩比; 当其中的等号成立时, 则称是相似的, 而 c 称作相似比. 显然, 相似映射是线性映射, 可由一个正交方阵乘上因子 c 决定.

设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}(1 < m)$ 是 D 上一组压缩映射或压缩函数系, 压缩比 $0 < c_i < 1, i = 1, 2, \cdots, m$. 称 D 的子集 $\mathcal{F}$ 是 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 的不变集, 如果

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(\mathcal{F}). \tag{2.1.1}$$

定理 2.1.1 *假设同上, 则 $\mathcal{F}$ 唯一存在.*

证明 记 $\mathcal{C}$ 为 R^n 的非空紧致子集构成的集合族, 在 Hausdorff 度量 ρ 下, $\mathcal{C}$ 是完备的 (见文献 [6] 或附录 A). 定义映射

$$\begin{cases} S: \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \\ S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), \forall E \in \mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

对 S 进行迭代:

$$S^0(E) = E, S^1(E) = S(E), \cdots, S^k(E) = SS^{k-1}(E), \cdots.$$

任意取 $E \in \mathcal{C}$ 使得 $S_i(E) \subset E, \forall 0 \leqslant i < m$, 下面证明

$$\mathcal{F} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

显然, 存在 $E \in \mathcal{C}$ 使得 $S_i(E) \subset E, \forall 0 < i \leqslant m$, 例如, 取 $E = D$. 这蕴涵 $S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \subset E$, 因此 $S^k(E) \subset S^{k-1}(E), \forall k > 0$, 即 $\{S^k(E)\}_0^{\infty}$ 是非空集合的递降序列. 据紧致性的有限交性质, 有

$$\mathcal{F} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) \neq \varnothing.$$

显然 $S(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}$ 对 S, 亦即对 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 不变. 下面证明唯一性.

设 $A, B \in \mathcal{C}$, 有

$$\rho(S(A), S(B)) = \rho\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right) \leqslant \max_{0<i\leqslant m} \rho(S_i(A), S_i(B)),$$

因为若

$$d(S_i(A), \delta) = \{x \in R^n : d(S_i(A), x) < \delta\} \supset S_i(B), \quad \forall i, \delta > 0,$$

则

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} d(S_i(A), \delta)\right) \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B),$$

这里 d 是 R^n 上的度量, 所以

$$\rho(S(A), S(B)) \leqslant (\max_{0<i\leqslant m} c_i)\rho(A, B).$$

这蕴涵着: 若 $S(A) = A, \quad S(B) = B$ 是两个不变集, 则 $\rho(A, B) = 0$, 显然 $A = B$.□

上面在证明存在性时, 要求初始集 $E \in \mathcal{C}$ 满足 $S_i(E) \subset E, \forall 0 < i \leqslant m$. 事实上, 任意的 $E \in \mathcal{C}$ 都可以作为初始集而结果不变 [5]. 在上述证明中, 显然有

$$S^k(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_0} \cdots S_{i_{k-1}}(E),$$

其中 J_k 是 m 个符号 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的 k 序列的集合, $k > 0$, $S_{i_0} S_{i_1} \cdots S_{i_k}$ 表示映射的复合, 即

$$S_{i_0} \cdots S_{i_k}(x) = S_{i_0}(S_{i_1}(\cdots(S_{i_k}(x)))), \quad \forall x \in F.$$

易见, 存在 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上无限序列

$$(i_0, i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots),$$

使得 $x \in S_{i_0} \cdots S_{i_k}(E), \forall k > 0$.

记单点集

$$\{x_{i_0,i_1,\cdots}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_{i_0} \cdots S_{i_k}(E).$$

显然

$$\mathcal{F} = \cup \{x_{i_0,i_1,\cdots}\}.$$

令 (Σ_m, σ) 为 m 个符号上的符号动力系统, 其中

$$\Sigma_m = (1, 2, \cdots, m)^N,$$

N 是非负整数.

令

$$\alpha(i_0 i_1 i_2 \cdots) = (i_1 i_2 \cdots),$$

即为转移自映射 (见文献 [29] 或附录 A), 则得到映射:

$$\begin{cases} f : \Sigma_m \to \mathcal{F}, \\ (i_0, i_1, \cdots) \to x_{i_0,i_1,\cdots}. \end{cases}$$

一般而言, f 是满的但不一定是单的. 定义连续映射

$$\begin{cases} \overline{\alpha} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \\ x_{i_0,i_1,\cdots} \mapsto x_{i_1,i_2,\cdots}. \end{cases}$$

容易验证 $f\alpha = \overline{\alpha} f$, 即 α 与 $\overline{\alpha}$ 拓扑半共轭 [29].

2.1.2　自相似集

设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 是 D 上的一个相似压缩函数系, 相似比 $0 < c_i < 1, i = 1, 2, \cdots, m$. 设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 的不变集为

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_k}(E), \quad \forall k > 1.$$

以后称 $S_i(E)$ 为 E 的 1 级拷贝, $i = 0, 1, \cdots, \infty$; 归纳地, $S_{i_0} \cdots S_{i_{k-1}}(E)$ 称为 E 的 k 级拷贝, $\forall (i_0 i_1 \cdots i_{k-1}) \in J_k$. 易见, E 的每级拷贝都与 E 相似. 显然, 不同的同级的拷贝可以相交不空. 为了避免这种情况发生, 下面引进分离性条件.

如果存在有界非空开集 $V \subset R^n$, 满足

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V); \quad S_i(V) \cap S_j(V) = \varnothing, \quad i \neq j,$$

就称 E 或 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 满足开集条件 (OSC). 如果这样的 V 存在的话, 那么称作恰当的, 而恰当的开集是不唯一的. 如果还满足

$$S_i(E) \cap S_j(E) \neq \varnothing, \quad i \neq j,$$

就称 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 或 E 满足强分离条件 (SSC). 开集条件保证 E 的不同的 1 级拷贝相交甚微; 而强分离条件则保证它们不相交, 这更简单而便于研究. 强分离条件较之开集条件更强, 这在它们的性质上将有所反映, 我们在以后的讨论中将会涉及. 1.1 节所举的分形的例子全部是满足开集条件的自相似集, 其中, 中间三分 Cantor 集 (由两个相似压缩生成) 和 Sierpinski 地毯 (由四个相似压缩生成) 满足强分离条件, 而 Sierpinski 垫片 (由三个相似压缩生成) 和 Koch 曲线 (一个由四个压缩函数生成的压缩函数系将在第 4 章给出) 满足开集条件. 这些自相似集的相应恰当开集很容易给出, 相应的相似压缩函数系也容易写出. 下面以三分中间 Cantor 集为例给出一个相似压缩函数系, 其余如 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯和 Koch 曲线, 见第 4 章. 设三分中间 Cantor 集在 $[0,1]$ 上生成, 定义

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x; \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$

$\{S_1, S_2\}$ 即是一组相似压缩函数系, 相似比都是 $\frac{1}{3}$, 且 $(0,1)$ 是一个恰当开集.

判断一个自相似集是否满足开集条件不是一件容易的工作. 文献 [1] 给出一个构造性的充要条件. 本书只讨论满足开集条件的自相似集, 不讨论这样的问题.

2.2 自相似集的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度

本节总是假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是由相似压缩函数系 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 生成的自相似集, 相似比 $0 < c_i < 1, i = 1, 2, \cdots, m$, 而且 E 满足开集条件, 并设 V 是一个恰当的开集. 在证明本节主要结果之前, 先证明两个引理.

引理 2.2.1 *设 $\delta > 0, \alpha = \{U_j, j > 0\}$ 是 E 的一个 δ 覆盖. 则*

$$S_{i_1} \cdots S_{i_k}(\alpha) = \{S_{i_1} \cdots S_{i_k}(U_j) : j > 0, \ \forall (i_1 \cdots i_k) \in J_k\}, \quad k > 1$$

是 E 的一个 $(\max_i\{c_i\})^k \delta$ 覆盖.

证明　设 $k>1$. 有

$$\bigcup_{(i_1\cdots i_k)\in J_k}\bigcup_{j>0} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)\supset \bigcup_{(i_1\cdots i_k)\in J_k} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(E)\supset E,$$

即 $S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 是 E 的一个覆盖. 因为

$$|S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)| = c_{i_1}\cdots c_{i_k}|U_j|\leqslant c_{i_1}\cdots c_{i_k}\delta,\quad \forall j>0.$$

故 $S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 是 E 的一个 $(\max_i\{c_i\})^k\delta$ 覆盖. □

引理 2.2.2　*设 $\{\mathcal{V}_i\}$ 是 $\mathcal{R}^n$ 中两两不相交的开集族, 其中, 每一个 $\mathcal{V}_i$ 包含一个半径为 a_1r 的球, 并包含在半径为 a_2r 的球内. 则任何半径为 r 的球 $\mathcal{B}_r$ 最多与 $(1+2a_2)^n a_1^n$ 个 $\overline{\mathcal{V}_i}$ 相交.*

证明　如果 $\overline{\mathcal{V}_i}$ 与 $\mathcal{B}_r$ 相交, 那么 $\overline{\mathcal{V}_i}$ 包含在一个半径为 $(1+2a_2)r$ 的 $\overline{\mathcal{V}_i}$ 且与 $\mathcal{B}_r$ 同心的圆内. 设有 q 个 $\overline{\mathcal{V}_i}$ 与 $\mathcal{B}_r$ 相交, 则对所有相应在内部半径为 a_1r 的球体积求和, 可得

$$q(a_1r)^n\leqslant(1+2a_2)^n r^n,$$

这就给出所要求的 q 的上界. □

本节主要结果是下面的经典定理 (证明取自文献 [6]).

定理 2.2.3　*假设 E 如上, 则 E 的 $\mathcal{H}$ 维数 $s=\dim_{\mathcal{H}}(E)$ 由方程*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{2.2.1}$$

决定, 而其 $\mathcal{H}$ 测度满足 $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$.

证明　设 s 满足方程 (2.2.1). E 显然是其自身的一个覆盖, 而且是 $|E|$ 覆盖. 记

$$E_{i_1\cdots i_k}=\bigcup_{(i_1\cdots i_k)\in J_k} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(E),\quad k>0.$$

据引理 2.2.1, $\{E_{i_1\cdots i_k},\forall(i_1\cdots i_k)\in J_k\}$ 是 E 的一个 $(\max_i c_i)^k|E|$ 覆盖. 有

$$\begin{aligned}\sum_{(i_1\cdots i_k)\in J_k}|E_{i_1\cdots i_k}|^s &= \sum_{(i_1\cdots i_k)\in J_k}(c_{i_1}\cdots c_{i_k})^s|E|^s\\ &=\left(\sum_{i_1}c_{i_1}^s\right)\cdots\left(\sum_{i_k}c_{i_k}^s\right)|E|^s=|E|^s.\end{aligned}$$

对任意 $\delta>0$, 可选 k 充分大, 使得 $(\max_i c_i)^k|E|<\delta$ (注意, $|E|$ 是有限正数), 因此

$$\mathcal{H}_\delta^s(E)\leqslant|E|^s.$$

令 $\delta \to 0$, 得 $\mathcal{H}^s(E) \leqslant |E|^s$. 这就证明了 $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leqslant s$.

下面估计 $\mathcal{H}^s(E)$ 的下界. 较之估计上界, 这将更麻烦. 设 Σ_m 是 m 符号空间, 并用

$$I_{i_1\cdots i_k} = \{(i_1 \cdots i_k q_{k+1} \cdots) : 1 \leqslant q_j \leqslant m, j \geqslant k+1\}$$

表示初始值为 $(i_1 \cdots i_k)$ 的柱形. 在 Σ_m 上定义质量分布 μ, 使得 $\mu(I_{i_1\cdots i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$. 因为 $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum\limits_{i=1}^{m}(c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$, 即

$$\mu(I_{i_1\cdots i_k}) = \sum_{i=1}^{m}(c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s.$$

这蕴涵 μ 是 Σ_m 上的质量分布且 $\mu(\Sigma_m) = 1$. 定义

$$\widetilde{\mu}(\mathcal{A}) = \mu\{(i_1 i_2 \cdots) : x_{i_1 i_2 \cdots} \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{A} \subset E.$$

容易验证 $\widetilde{\mu}(E) = 1$. 这个 $\widetilde{\mu}$ 由 μ 诱导而来. 下面证明 $\widetilde{\mu}$ 满足质量分布原理.

设 $\mathcal{V}$ 是一个恰当集. 因为

$$\bar{\mathcal{V}} \supset S(\bar{\mathcal{V}}) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(\bar{\mathcal{V}}),$$

迭代递降序列 $\{S^k(\bar{\mathcal{V}})\}$ 收敛到 E. 特别地, 有 $\bar{\mathcal{V}} \supset E$ 和

$$\bar{\mathcal{V}}_{i_1\cdots i_k} \supset E_{i_1\cdots i_k}, \quad \forall (i_1 \cdots i_k) \in J_k.$$

设 $\mathcal{B}_r (0 < r < 1)$ 是一个以 r 为半径的任意球. 借助考虑具有与 $\mathcal{B}_r (0 < r < 1)$ 直径相近的 $\mathcal{V}_{i_1} \cdots_{i_k}$, 并使其闭包与 $\mathcal{B}_r$ 相交不空, 估计 $\widetilde{\mu}(\mathcal{B}_r)$. 对 $(i_1 i_2 \cdots)$ 在前 i_k 项处截尾, 使得

$$(\min_i\{c_i\}) r \leqslant c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leqslant r,$$

且用 $\mathcal{Q}$ 表示按这种方式得到的有限序列构成的有限集合. 那么对每一个 $(i_1 i_2 \cdots) \in \Sigma_m$, 恰好存在一个 k, 使得 $(i_1 \cdots i_k) \in \mathcal{Q}$. 因为 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ 是两两不相交的, 故

$$\mathcal{V}_{i_1,\cdots,i_k,1}, \cdots, \mathcal{V}_{i_1,\cdots,i_k,m}$$

对所有 $(i_1 \cdots i_k) \in \mathcal{Q}$ 也是两两不相交的. 由此易于看出, 开集族 $\{\mathcal{V}_{i_1,\cdots,i_k} : (i_1, \cdots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$ 也两两不相交. 类似地, 有

$$E \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} E_{i_1,\cdots,i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \overline{\mathcal{V}}_{i_1,\cdots,i_k}.$$

选择 a_1, a_2 使得 $\mathcal{V}$ 包含一个半径为 $a_1 r$ 的球, 包含在一个半径为 $a_2 r$ 球内. 于是, 对 $(i_1 \cdots i_k) \in \mathcal{Q}$, 集合 $\mathcal{V}_{i_1,\cdots,i_k}$ 包含半径为 $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_{1r}$ 的球, 因而包含半径为 $(\min_i c_i)_k a_1 r$ 的球, 且包含在半径为 $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2 r$ 的球内, 因而包含在半径为 $a_2 r$ 的球内. 设 $\mathcal{Q}_1$ 表示使 $B_r \bigcap \overline{\mathcal{V}}_{i_1,\cdots,i_k} \neq \varnothing$ 的那些序列 $(i_1, \cdots, i_k) \in \mathcal{Q}$. 据引理 2.2.2, 最多有 $q = (1+2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^n$ 个序列包含在 $\mathcal{Q}_1$ 内. 于是

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(\mathcal{B}_r) = \widetilde{\mu}(\mathcal{B}_r \cap E) &\leqslant \mu\{(i_1 i_2 \cdots) : x_{i_1 i_2 \cdots} \in (\mathcal{B}_r \cap E)\} \\ &\leqslant \mu(\cup I_{i_1 \cdots i_k} : i_1 \cdots i_k \in \mathcal{Q}_1).\end{aligned}$$

因为如果

$$x_{i_1 i_2 \cdots} \in (\mathcal{B}_r \cap E) \subset \cup(\bar{\mathcal{V}}_{i_1 \cdots i_k} : i_1 \cdots i_k \in \mathcal{Q}_1),$$

那么存在一个整数 k, 使得 $i_1 \cdots i_k \in \mathcal{Q}_1$. 于是

$$\widetilde{\mu}(\mathcal{B}_r) \leqslant \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1} \cdots i_k) = \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leqslant \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \leqslant r^s q.$$

因为任意集合 $\mathcal{U}$ 包含在半径为 $|\mathcal{U}|$ 的球内, 有 $\widetilde{\mu}(\mathcal{U}) \leqslant |\mathcal{U}|^s q$, 所以由质量分布原理, 得 $\mathcal{H}^s(E) \geqslant q^{-1}$, 从而 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. □

这个定理圆满地解决了满足开集条件的这一类自相似集的 $\mathcal{H}$ 维数计算问题, 可以认为是分形几何迄今最完美最系统的结果. 在 1.1 节中所罗列的例子的 $\mathcal{H}$ 维数都可以从中很简单地得到.

例如, 中间三分 Cantor 集 C(例 1.1.1) 的 $\mathcal{H}$ 维数由方程

$$(1/3)^s + (1/3)^s = 1$$

决定, 因此 $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \lg 2/\lg 3$.

Sierpinski 垫片 S(例 1.1.2) 的 $\mathcal{H}$ 维数由方程

$$(1/2)^s + (1/2)^s + (1/2)^s = 1$$

决定, 因此 $\dim_{\mathcal{H}}(S) = \lg 3/\lg 2$.

Koch 曲线 K(例 1.1.3) 的 $\mathcal{H}$ 维数由方程

$$(1/3)^s + (1/3)^s + (1/3)^s + (1/3)^s = 1$$

决定, 因此 $\dim_{\mathcal{H}}(K) = \lg 4/\lg 3$.

而 $C \times C$(图 1.1.4(a)) 的 $\mathcal{H}$ 维数与 Koch 曲线的相同, 即 $\dim_{\mathcal{H}}(C \times C) = \lg 4/\lg 3$.

Sierpinski 地毯 S(图 1.1.4(b)) 的 $\mathcal{H}$ 维数由方程

$$(1/4)^s + (1/4)^s + (1/4)^s + (1/4)^s = 1$$

决定, 因此 $\dim_{\mathcal{H}}(S) = 1$, 等等.

对于这类分形的 $\mathcal{H}$ 测度的计算问题, 情形远非如此简单. 这个定理只是告诉我们

$$0 < \mathcal{H}^s(E) \leqslant |E|^s < \infty,$$

即有一个非 ∞ 的上限, 但没有非 0 的下限, 此外别无其他信息. 注意, 上面例子中, 有的 $\mathcal{H}$ 维数等于 1, 有的大于 1, 有的小于 1. 以后将会看到, $\mathcal{H}$ 测度计算和估计困难主要是中间那种情形 ($\mathcal{H}$ 维数为非整数).

2.3 $\mathcal{H}$ 测度的计算与估计

在 1.2 节中曾给出中间三分 Cantor 集的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度的准确值的计算, 其中的 $\mathcal{H}$ 维数可由上节直接给出, 而其 $\mathcal{H}$ 测度的计算却没有直接给出的方法, 其困难程度已可见一斑. 本节将专门讨论 $\mathcal{H}$ 测度计算与估计及相关问题. 我们将先证明一个关键不等式, 它在 $\mathcal{H}$ 测度的计算与估计以及在后面上凸密度的讨论中起非常重要作用. 其次, 计算平面上一个 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值以及它们在高维空间的推广, 这是迄今为止仅有的这样的结果. 然后, 讨论一般情形 ($\mathcal{H}$ 维数大于 1 但非整数的情形) 以及相关问题. 在本节中, 除非另有声明, 所有分形均指满足开集条件的自相似集, 并用 E 表示 (对特殊分形用专有符号, 如 Sierpinski 垫片用 S 表示, 等等).

一个重要不等式

下面设 $E \subset \mathcal{R}^n$ 是满足开集条件的自相似集, 由相似压缩函数系 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 生成, 具有相似比 $0 < c_i < 1, i = 1, 2, \cdots, m$.

引理 2.3.1 设 $\delta > 0$, 则 $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s_\delta(E)$.

证明 设 $\alpha = \{\mathcal{U}_l, l \geqslant 0\}$ 是 E 的一个 δ 覆盖. 据定义, 有

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s.$$

$S_{i_1}, \cdots, S_{i_k}(\alpha)$ 是 E 的 $(\max_i\{c_i\})^k\delta = \delta_k$ 覆盖, 故

$$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(E) \leqslant \sum_{J_k}\sum_{l=0}^{\infty} c^s_{i_1} \cdots c^s_{i_k} |\mathcal{U}_l|^s = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1}^{m} c^s_{i_1}\right)\cdots\left(\sum_{i_k}^{m} c^s_{i_k}\right)|\mathcal{U}_l|^s = \sum_{l=0}^{\infty}|\mathcal{U}_l|^s.$$

当 $k \to \infty$ 时, $\delta_k \to 0$. 据定义得

$$\mathcal{H}^s(E) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |\mathcal{U}_l|^s,$$

因此 $\mathcal{H}^s(E) \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(E)$, 而反方向不等式是显然的. □

推论 2.3.2　*设 $\alpha = \{\mathcal{U}_l, l \geqslant 0\}$ 是 E 的任意覆盖, 则*

$$\mathcal{H}^s(E) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s.$$

设 $\alpha = \{\mathcal{U}_l, l \geqslant 0\}$. 称 α 是 E 的一个 $\mathcal{H}^s$ 几乎处处覆盖, 如果

$$\mathcal{H}^s\left(E - \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{U}_l\right) = 0.$$

易于证明, 上述推论对 E 的 $\mathcal{H}^s$ 几乎处处覆盖也成立.

显然, E 是它本身的覆盖, 即自然覆盖, 因此 $\mathcal{H}^s(E) \leqslant |E|^s$.

定理 2.3.3 [32]　*设 $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ 为可测集, 且 $|\mathcal{U}| > 0$, 则*

$$\mathcal{H}^s(E \cap \mathcal{U}) \leqslant |\mathcal{U}|^s. \tag{2.3.1}$$

证明　因为 $E - E \cap \mathcal{U}$ 的 $\mathcal{H}$ 维数不大于 s, 因此 $\mathcal{H}^s(E - E \cap \mathcal{U}) < \infty$. 据定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $E - E \cap \mathcal{U}$ 的覆盖 $\beta = \{\mathcal{V}_l, l > 0\}$, 使得

$$\mathcal{H}^s(E - E \cap \mathcal{U}) + \varepsilon \geqslant \sum_{l=0}^{\infty} |\mathcal{V}_l|^s.$$

显然, $\gamma = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}_l, l > 0\}$ 是 E 的一个覆盖. 据引理 2.3.1 的推论, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \cap \mathcal{U}) + \mathcal{H}^s(E - E \cap \mathcal{U}) &\leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |\mathcal{V}_l|^s + |\mathcal{U}|^s \\ &\leqslant \mathcal{H}^s(E - E \cap \mathcal{U}) + \varepsilon + |\mathcal{U}|^s,\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{H}^s(E \cap \mathcal{U}) \leqslant \varepsilon + |\mathcal{U}|^s$. 考虑到 ε 的任意性, 即得 $\mathcal{H}^s(E \cap \mathcal{U}) \leqslant |\mathcal{U}|^s$. □

称这个不等式为 "部分估计原理", 其几何意义是明显的, 即 $\mathcal{U}$ 所包含部分的 $\mathcal{H}$ 测度不大于其直径的 s 次方, 它在以后的讨论中有重要应用. 引理 2.3.1 和推论 2.3.2 以及定理 2.3.3 对一般分形不成立. 例如, 如果对一般分形应用定理 2.3.3, 那么可以得到中间三分 Cantor 集的 Hausdorff 测度为零. 如图 2.3.1 所示, 其中 O 为顶点, 从点 O 引射线 OA, OB, OC 等, 并在每一个上构造三分 Cantor 集. 以 O 为

圆心 $r>0$ 为半径作扇形 (可设 $\angle AOC \leqslant 60°$), 记为 $\widehat{DE}$. 应用 "部分估计原理", 可得

$$\mathcal{H}^s(nC\cap\widehat{DE})\leqslant|r|^s.$$

其中 C 为三分 Cantor 集, nC 为 n 个 Cantor 集的并, s 为 Cantor 集的 $\mathcal{H}$ 维数 (显然, 任意多个共顶点的三分 Cantor 集的并的维数亦为它). 显然

$$\mathcal{H}^s(nC\cap\widehat{DE})=n\mathcal{H}^s(C\cap\widehat{DE})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

若 $\mathcal{H}^s(C)=1$, 则是不可能的. 矛盾.

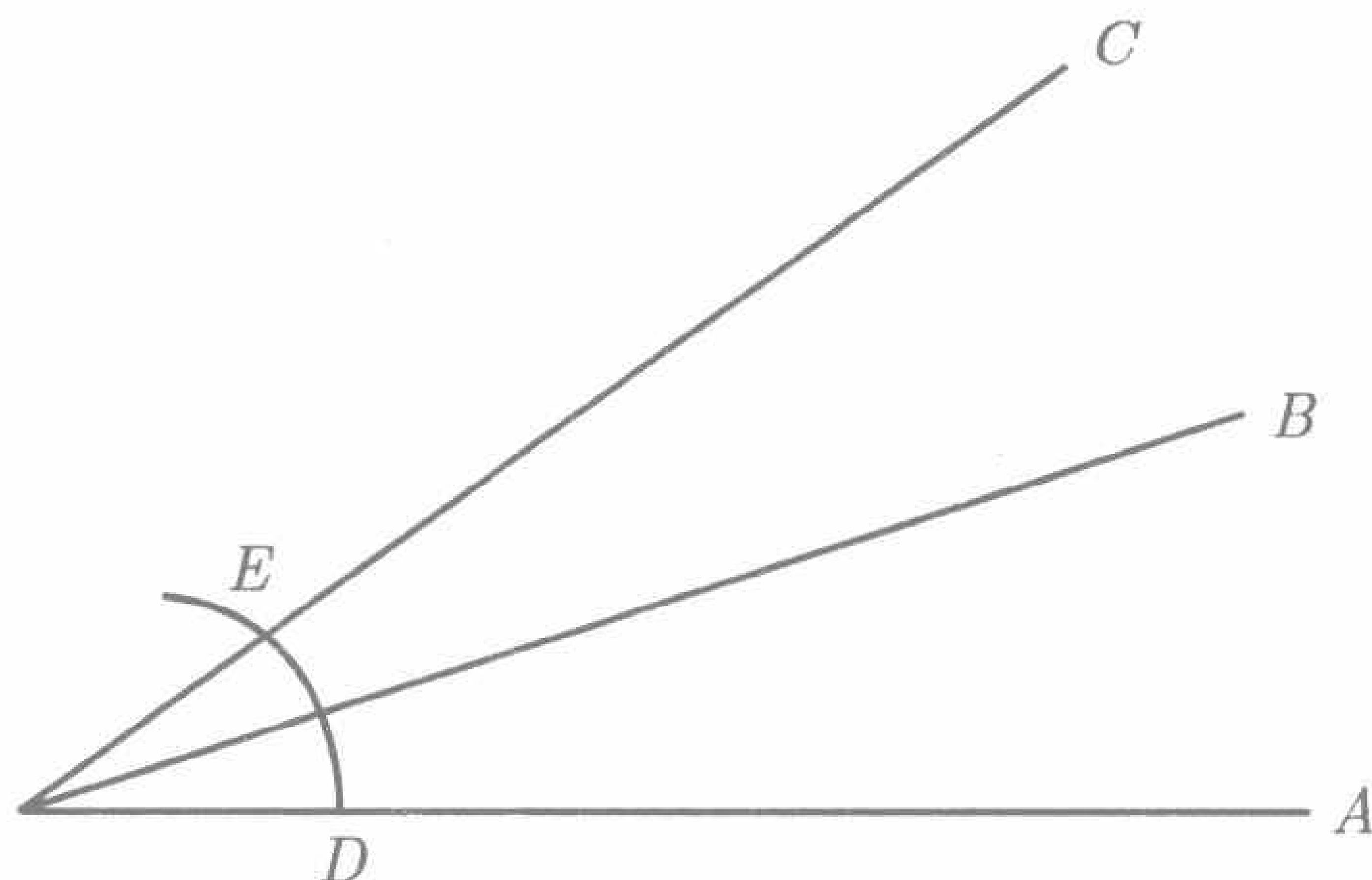


图 2.3.1 共点的三分 Cantor 集

式 (2.3.1) 之所以称为 "部分估计原理", 是因为任取一个可测子集 U 代入其中, 就可以得到 $\mathcal{H}^s(E)$ 的一个上限 (适当取 U, 这个上限易于计算或估计, 因为 $\dfrac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{\mathcal{H}^s(E)}$ 是一个无穷级数, 对特殊的 U 可以是一个简单分数), 所以计算或估计上限是比较容易的.

因此, 如何判断某个上限是否为准确值是一个重要问题. 注意到, 不等式

$$\mathcal{H}^s(E\cap\mathcal{U})\leqslant|\mathcal{U}|^s$$

的左端与 E 的 $\mathcal{H}$ 测度有关, 而右端却与之无关. 如果对某个满足开集条件的自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值提出猜测, 而这个猜测值大于其准确值, 那么定理 2.3.3 提供一个否定的方法, 因为只要找到一个子集 $\mathcal{U}$(这样的集合一定存在), 使得上述不等式的不等号反向即可. 下面否定 Marion 关于 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值的两个猜测就是用这种方法实现的. 当然, 当猜测值小于准确值时这种方法无效.

2.4 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}$-Sierpinski 地毯的 $\mathcal{H}$ 测度

下面计算 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}$- Sierpinski 地毯 S(图 1.1.4(b)) 的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值, 它是由压

缩比均为 1/4 的 4 个相似压缩函数 (可以具体写出) 在单位正方形上生成的, 显然, $\dim_{\mathcal{H}}(S)=1$. 然后讨论它的一些推广.

定理 2.4.1

$$\mathcal{H}^1(S)=\sqrt{2}.$$

在证明之前, 先作些准备 (参见图 1.1.4(b))[40].

(1) 设 $n\geqslant 0$. 易见 S_n 由 4^n 个边长为 $1/4^n$ 的正方形 (即 n 拷贝) 构成, 用 $\square_n$ 表示. 在 $\square_n$ 上生成 Sierpinski 地毯 (与原 Sierpinski 地毯几何相似, 相似比为 $1/4^n$), 用 $\frac{1}{4}-\square_n$ 表示. 据缩放比例性质, 有

$$\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}-\square_n\right)=\frac{1}{4^n}\mathcal{H}(S).$$

(2) 在单位正方形 S_0 上定义分布函数或自相似测度 μ:

$$\begin{cases}\mu(S_0)=\sqrt{2},\\ \mu(\square_n)=\dfrac{1}{4^n}\sqrt{2},\quad \forall n\geqslant 0,\\ \mu(S_0-S)=0.\end{cases}$$

易见, μ 是 S_0 上的一个测度, 支撑为 S, 其在 S 的限制是一个质量分布.

(3) 显然, 有 $\mathcal{H}(S)\leqslant\sqrt{2}$.

下面证明 $\mathcal{H}(S)\geqslant\sqrt{2}$.

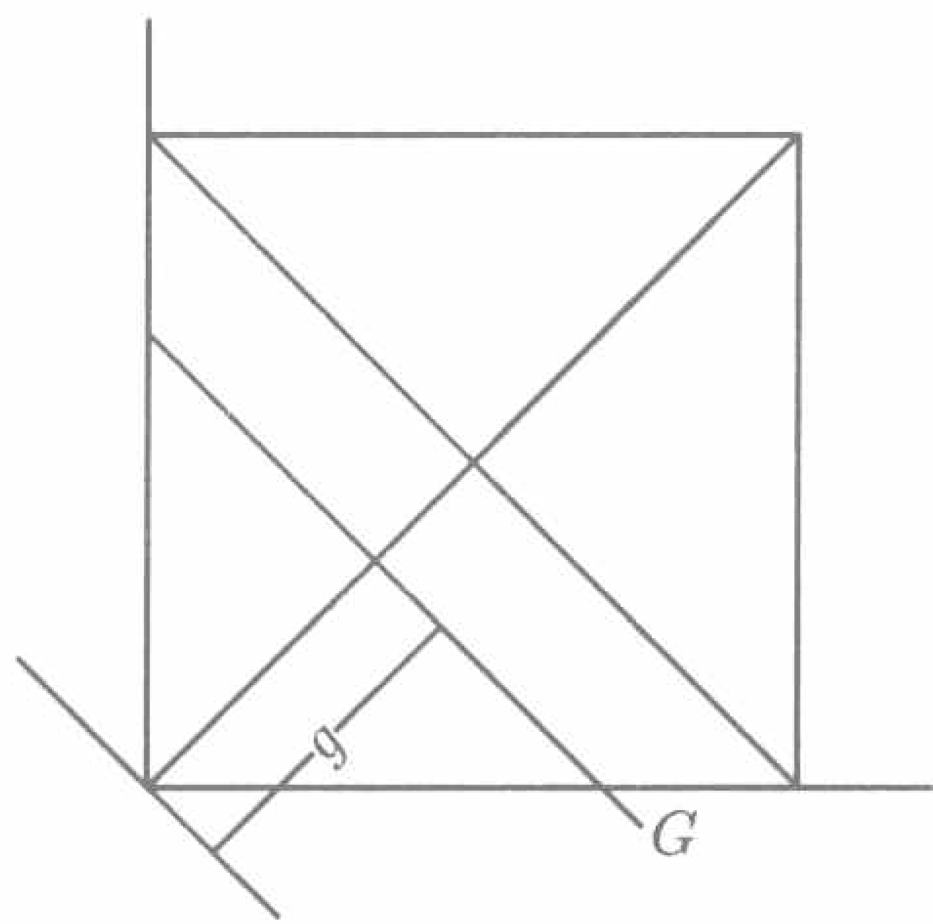


图 2.4.1　坐标系

(4) 如图 2.4.1 所示建立直角坐标系. S_0 的对角线和斜对角线的方程分别为 $x=y$, $x+y=1$. 设 G 是平行于斜对角线并与 S_0 相交的直线. 用 $d((0,0),G)=g\geqslant 0$ 表示坐标原点到 G 的距离, 并用 $\triangle_g$ 表示由坐标轴与 G 围成的实三角形. 分别绕 S_0 的中心旋转 π, 2π, 3π, 得到三个对称的图形.

(5) 作从 S 到 S_0 的对角线的垂直投影, 得到 $[0,\sqrt{2}]$ 上的分形 ($[0,\sqrt{2}]$ 上的三分 Cantor 集), 一个等价的描述如下：设 $F_0=[0,\sqrt{2}]$, 并在其上定义三个压缩函数:

$$S_1(x)=\frac{1}{4}x,\quad S_2(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}\sqrt{2},\quad S_3(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\sqrt{2},$$

它们生成一个满足开集条件的自相似集 (图 2.4.2):

$$F=\bigcup_{i=0}^{3}S_i(F)=\bigcap_{i=0}^{\infty}F_k.$$



图 2.4.2 分形在对角线上的投影

设 $k\geqslant 0$. F_k 由 3^k 个长度为 $\sqrt{2}/4^k$ 的两两不相交的 k 拷贝 (线段) 组成, 记作 I_k. 易见, $F_0-\bigcup\limits_{i=1}^{k}F_i$ 由两个长度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2\times 4}$ 的开区间, 2×3 个长度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2\times 4^2}$ 的开区间, $\cdots$, 2×3^k 个长度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2\times 4^k}$ 的开区间组成, 分别是 1 湖, 2 湖, $\cdots$, k 湖. 易见, $S_i(i=1,2,3)$ 把 i 湖映成 $i+1$ 湖.

(6) 在 F_0 定义一个分布函数 m (下面设 $1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant 3, k\geqslant 0$):

$$\begin{cases}m(F_0)=\sqrt{2},\\ m(F_0-F)=0,\\ m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0))=\dfrac{1}{4}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0)), i=1,3,\\ m(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0))=\dfrac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0)).\end{cases}$$

易见, m 是 F_0 上的测度, 支撑为 F, 限制在 F 上是一个质量分布.

令 $m(x)=m([0,x]), 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$. 易见, m 在 F_0 上连续.

引理 2.4.2 设 $i_1,\cdots,i_k$ 中等于 2 个数为 $i\leqslant k$, 则

$$m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0))=\frac{1}{2^i}\frac{1}{4^{k_i}}\sqrt{2}.$$

用归纳法, 证明从略.

推论 2.4.3 设 $(j_1,\cdots,j_k)$ 是 $(i_1,\cdots,i_k)$ 的置换, 则

$$m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}(F_0))=m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(F_0)),$$

$$m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}([0,g]))=m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g])),$$

这里

$$g \in F_0 - F_1 = \left(\frac{2}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}, \frac{6}{8}\sqrt{2}\right).$$

证明　第一个等式是明显的, 只证明第二个等式. 首先, 设 $g \in \left(\frac{2}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)$. 注意到 $S_1(F_0) = \left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]$, 有

$$\begin{aligned} m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}([0,g])) &= m\left(S_{j_1}\cdots S_{j_k}\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) = m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}S_1(F_0)) \\ &= m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0)) = m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) \\ &= m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g])). \end{aligned}$$

下面设 $g \in \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}, \frac{6}{8}\sqrt{2}\right)$. 注意到 $S_1(F_0) = \left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]$, $S_2(F_0) = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{5}{8}\sqrt{2}\right]$, 有

$$\begin{aligned} m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}([0,g])) &= m\left(S_{j_1}\cdots S_{j_k}\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) + m\left(S_{j_1}\cdots S_{j_k}\left(\left[\frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{5}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) \\ &= m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}S_1(F_0)) + m(S_{j_1}\cdots S_{j_k}S_2(F_0)) \\ &= m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0)) + m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_2(F_0)) \\ &= m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) + m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[\frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{5}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right) \\ &= m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g])). \end{aligned}$$

□

(7) μ 在 $F_0 = [0, \sqrt{2}]$ 上诱导一个测度, 使得 F_0 的 Borel 子集的测度等于该集合的垂直投影的逆像的 μ 测度. 容易验证, 这个诱导测度恰是 m. 因此, 有

引理 2.4.4　$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{1}{2}g \Leftrightarrow m([0,g]) \geqslant \frac{1}{2}g, 0 \leqslant g \leqslant \sqrt{2}$.

证明　直接验证, 从略. □

引理 2.4.5　设 $1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant 3, k \geqslant 0$ 且 $g \in F_0 - F = \left(\frac{2}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}, \frac{6}{8}\sqrt{2}\right)$. 则 $m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g])) \leqslant \frac{1}{4^k}\frac{1}{2}g$.

证明　$g \in \left(\frac{2}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) \Rightarrow m([0,g]) = m\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{2}g$,

$$g \in \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}, \frac{6}{8}\sqrt{2}\right) \Rightarrow m([0,g]) = m\left(\left[0, \frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right) + m\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{5}{8}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{2}g,$$

即结论对 $k=0$ 成立. 下面设结论对 $k > 1$ 以成立, 证明结论对 $k+1$ 亦成立.

首先设 $g\in\left(\frac{2}{8}\sqrt{2},\frac{3}{8}\sqrt{2}\right)$, $i=1,3$, 有

$$\begin{aligned}m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))&=m\left(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0,\frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)=m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))\\&=\frac{1}{4}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))=\frac{1}{4}m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0,\frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)\\&=\frac{1}{4}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))\geqslant\frac{1}{4}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2}g=\frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{2}g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))&=m\left(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0,\frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)=\frac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))\\&=\frac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g))\geqslant\frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2}g\geqslant\frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{2}g.\end{aligned}$$

现设 $g\in\left(\frac{5}{8}\sqrt{2},\frac{6}{8}\sqrt{2}\right)$, $i=1,3$, 有

$$\begin{aligned}m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))&=m\left(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0,\frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)\\&\quad+m\left(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[\frac{3}{8}\sqrt{2},\frac{5}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)\\&=m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))+m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}S_2(F_0))\\&=\frac{1}{4}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))+\frac{1}{4}m(S_iS_{i_1}\cdots S_{i_k}S_2(F_0))\\&=\frac{1}{4}m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[0,\frac{2}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)\\&\quad+\frac{1}{4}m\left(S_{i_1}\cdots S_{i_k}\left(\left[\frac{3}{8}\sqrt{2},\frac{5}{8}\sqrt{2}\right]\right)\right)\\&=\frac{1}{4}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))\geqslant\frac{1}{4}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2}g>\frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{2}g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))&=m(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))+m(S_2S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_2(F_0))\\&=\frac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_1(F_0))+\frac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}S_2(F_0))\\&=\frac{1}{2}m(S_{i_1}\cdots S_{i_k}([0,g]))\geqslant\frac{1}{2}\frac{1}{4^k}\frac{1}{2}g>\frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{2}g.\end{aligned}$$

□

引理 2.4.6 设 $k\geqslant 0$, I_k 是 F_k 的基本线段, 点 (数)r_k 包含在 I_k 的两个湖之一内. 用 g_k 表示 I_k 的左端点 (数), 则

$$m([g_k,r_k])\geqslant\frac{1}{2}(r_k-g_k).$$

证明 据 F 的构造, 易见, 存在

$$0 \leqslant g \leqslant \sqrt{2}, \quad g \in F_0 - F_1, \quad 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant 3$$

使得

$$S_{i_1 \cdots i_k}([0, g]) = [g_k, r_k].$$

显然, $r_k - g_k = \frac{1}{4^k} g$. 据引理 2.4.5, 有

$$m(S_{i_1} \cdots S_{i_k}([0, g])) = m([g_k, r_k + g_k]) \geqslant \frac{1}{4^k}\frac{1}{2} g = \frac{1}{2}(r_k - g_k). \qquad \square$$

引理 2.4.7 $\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{1}{2} g, 0 \geqslant g \geqslant \sqrt{2}$.

证明 据引理 2.4.4, 只需证明 $m([0, g]) \geqslant \frac{1}{2} g, 0 \leqslant g \leqslant \sqrt{2}$.

首先归纳证明, 当 $g \in F_0 - F_k, \forall k \geqslant 0$ 时结论成立. 当 $k = 1$ 时, 据引理 2.4.5, 结论成立. 下面假设当 $k \geqslant 2, g \in F_0 - F_i, i \leqslant k$ 时结论成立. 设 $[0, g]$ 的右端点 g 在 F_k 的一个基本线段 I_k 内, 用 g_k 表示 I_k 的左端点. 令 $g = g_k + r_k, 0 < r_k < \frac{1}{4^k}\sqrt{2}$. 易见

$$m([0, g]) = m([0, g_k]) + m([g_k, g_k + r_k]).$$

因为 g_k 是 I_k 的左端点, 据归纳假设和 m 的连续性, 有

$$m([0, g_k]) \geqslant \frac{1}{2} g_k.$$

据引理 2.4.6, $m([g_k, r_k]) \geqslant \frac{1}{2} g_k$. 所以有

$$m([0, g]) = m([0, g_k]) + m([g_k, r_k + g_k]) \geqslant \frac{1}{2} g.$$

归纳步骤完成, 引理得证. 据测度的连续性, 引理对任意 $0 \leqslant g \leqslant \sqrt{2}$ 成立. $\square$

引理 2.4.8 对任意可测集 V, $\mu(V) \leqslant |V|$ 成立.

证明 证明上述引理分下述几步:

(1) 设 $V \supset S_0$. 显然, $\mu(V) = \sqrt{2}, |V| \geqslant \sqrt{2}$, 引理成立.

(2) 设 V 包含 S_0 的 1 个 1 拷贝且不与其他 3 个相交. 显然

$$\mu(V) = \frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad |V| \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

引理成立.

(3) 设 V 与 2 个 1 拷贝 $\square_1, \square_1'$ 相交, 但不与另外 2 个相交. 如果 $\square_1, \square_1'$ 位于 S_0 的对角线上, 显然

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_1)+\mu(\square_1') = \frac{\sqrt{2}}{2} = d(\square_1,\square_1') \leqslant |V|.$$

引理成立.

下设它们在同一边上 (情形 1, 见图 2.4.3). 令

$$a = \min\{x : (x,y) \in V \cap (\square_1 \cap \square_1')\},$$

$$b = \max\{x : (x,y) \in V \cap (\square_1 \cap \square_1')\}.$$

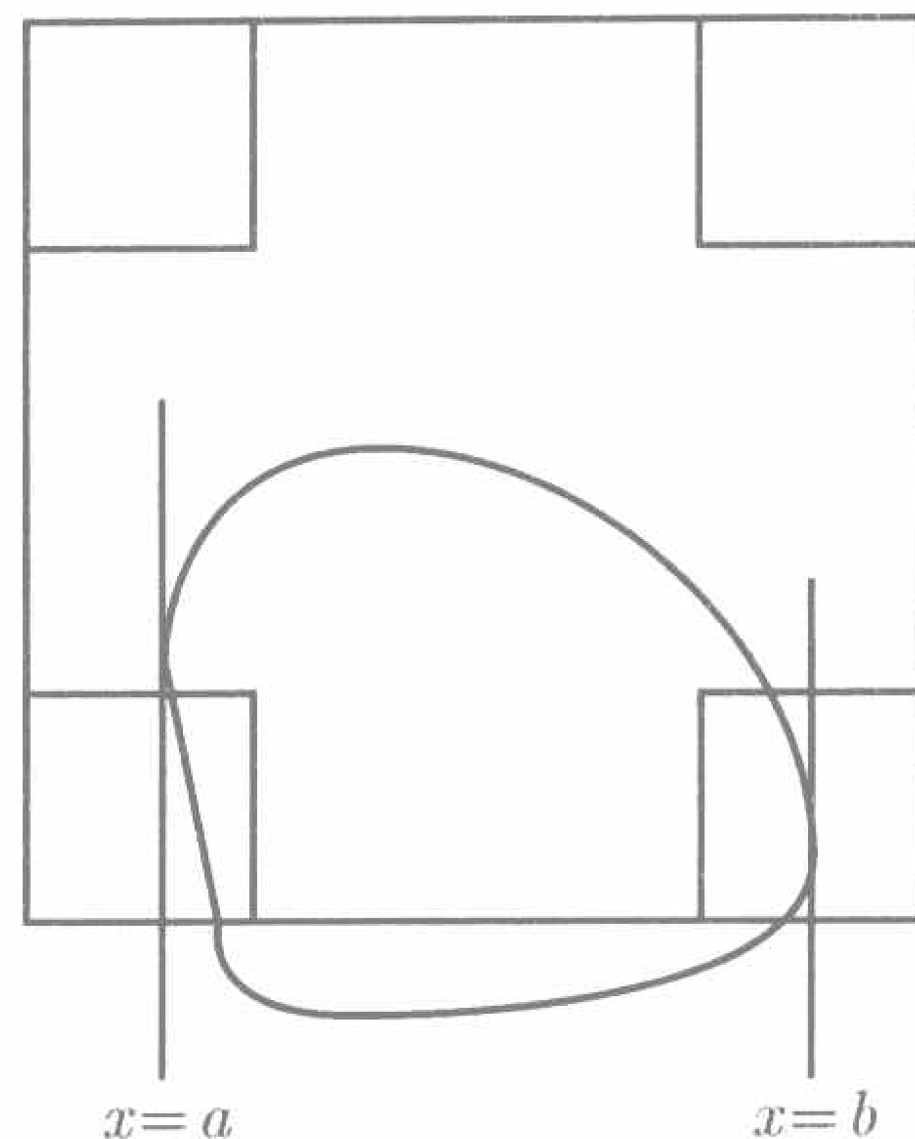


图 2.4.3 V 与 2 个 1 拷贝相交

显然地, $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \leqslant b \leqslant 1, |V| \geqslant b-a$. 用 $\square_a$ 表示由直线

$$x=a,\quad x=\frac{1}{4},\quad y=0,\quad y=\frac{1}{4}$$

构成的长方形; 用 $\square_b$ 表示由直线

$$x=\frac{3}{4},\quad x=b,\quad y=0,\quad y=\frac{1}{4}$$

构成的长方形. 显然

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_a)+\mu(\square_b).$$

此外, 易见

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{16} \Rightarrow \mu(\square_a) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} = \mu(\square_1),\\
&\frac{3}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \mu(\square_a) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2}\mu(\square_1),\\
&\frac{3}{4} \leqslant b \leqslant \frac{3}{4}+\frac{1}{16} \Rightarrow \mu(\square_b) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2}\mu(\square_1'),\\
&\frac{3}{16}+\frac{3}{4} \leqslant b \leqslant 1 \Rightarrow \mu(\square_b) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} = \mu(\square_1').
\end{aligned}$$

经过简单计算, 有

$$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{16},\quad \frac{3}{4} \leqslant b \leqslant \frac{15}{16},$$

因此

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_a)+\mu(\square_b) \leqslant b-a \leqslant |V|,$$

$$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{16}, \quad \frac{15}{16} \leqslant b \leqslant 1 \Rightarrow \mu(V) \leqslant b-a \leqslant |V|.$$
$$\frac{3}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} \leqslant b \leqslant \frac{13}{16} \Rightarrow \mu(V) \leqslant b-a \leqslant |V|,$$
$$\frac{3}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{15}{16} \leqslant b \leqslant 1 \Rightarrow \mu(V) \leqslant b-a \leqslant |V|. \qquad \square$$

下面设 V 至少与 3 个 1 拷贝相交. 不失普遍性, 设 $V \subset S_0$. 通过 4 个在 S_0 内部的 1 拷贝的顶点作分别平行于相应对角线和斜对角线的直线 G_1, G_2, G_3, G_4. 再作分别平行于它们的直线 G_5, G_6, G_7, G_8, 得到恰包含 V 的正方形 $\square_V$(见图 2.4.4).

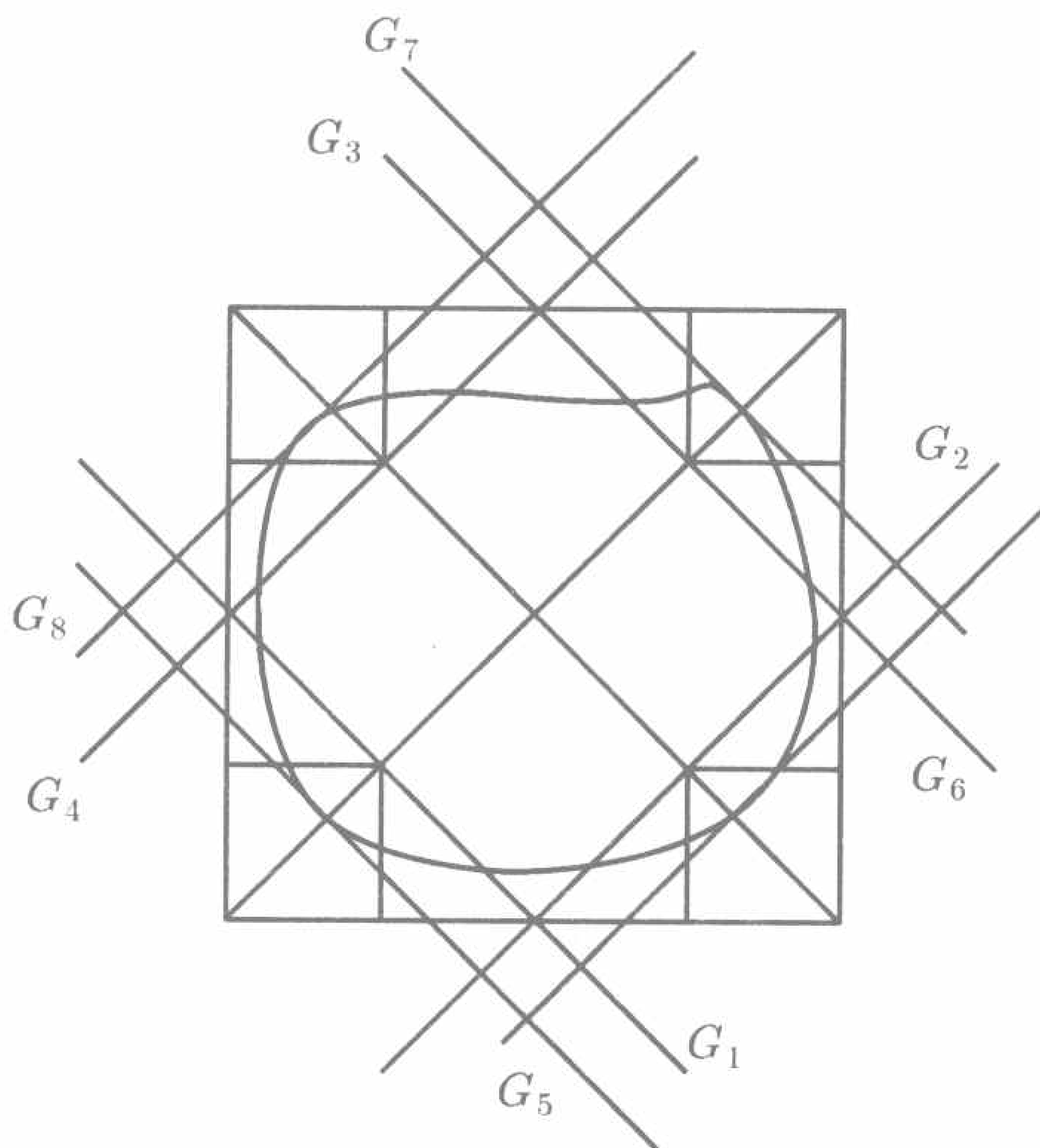


图 2.4.4　V 至少与 3 个 1 拷贝相交

(4) 设 V 与 4 个 1 拷贝均相交. 记距离

$$d(G_1, G_5) = a_1, \qquad d(G_2, G_6) = a_2,$$
$$d(G_3, G_7) = a_3, \qquad d(G_4, G_8) = a_4,$$
$$d((0,0), G_5) g_1, \qquad d((1,0), G_6) = g_2,$$
$$d((1,1), G_7) = g_3, \quad d((0,1), G_8) = g_4.$$

显然有

$$a_1 + g_1 = a_2 + g_2 = a_3 + g_3 = a_4 + g_4 = \frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$|V| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 + a_3, \quad |V| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + a_2 + a_4.$$

因此

$$\begin{aligned}|V| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - (g_1 + g_2 + g_3 + g_4)) \\ &= \sqrt{2} - \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4).\end{aligned}$$

据引理 2.4.7 和推论, 有

$$\begin{aligned}\mu(V) &\leqslant \sqrt{2}-(\mu(\triangle_{g_1})+\mu(\triangle_{g_2})+\mu(\triangle_{g_3})+\mu(\triangle_{g_4})\\ &\leqslant \sqrt{2}-\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4)\leqslant |V|.\end{aligned}$$

结论成立.

设 V 仅与 3 个 1 拷贝相交. 不失普遍性, 设它不与左上角的那个相交 (参见图 2.4.4). 易见

$$|V|\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}+a_1+a_3=\sqrt{2}-g_1-g_3.$$

据引理 2.4.7, 有

$$\begin{aligned}\mu(V) &\leqslant \frac{3}{4}\sqrt{2}-(\mu(\triangle_{g_1})+\mu(\triangle_{g_2})+\mu(\triangle_{g_3}))\\ &\leqslant \frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3).\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}|V|-\mu(V) &\geqslant \sqrt{2}-g_1-g_3-\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}(g_1+g_3)+\frac{1}{2}g_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-g_1-g_3\right)+\frac{1}{2}g_2\\ &\geqslant \frac{1}{2}g_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

结论成立.

(5) 设 V 仅与 1 个 1 拷贝 $\square_1$ 相交. 在 $\square_1$ 上重复上述过程, 可以证明结论成立. 留下的情形是 $V\cap\square_n\neq\varnothing$ 只对一个 n 成立, $\forall n>0$. 易见, 这时 $\mu(V)=0$, 显然, 结论亦成立.

至此, 引理 2.4.8 证毕. □

定理 2.4.1 的证明 据引理 2.4.8, 有

$$\mathcal{H}(S)\geqslant\sqrt{2}.$$

而

$$\mathcal{H}(S)\leqslant|S|=\sqrt{2}$$

是显然的. 因此

$$\mathcal{H}(S)=\sqrt{2}.$$ □

说明 (1) 定理 2.4.1 首先在文献 [40] 中被证明, 当时是唯一的这样的结果 (非直线上的自相似集). 可以看出证明相当复杂.

(2) 对图 1.1.4(b) 作如下改造: 把单位正方形相似压缩到四角, 相似比依然相同但不大于 1/4(即 1 拷贝的边长小于 1/4). 这样得到的自相似集 (亦用 S 表示) 亦满足强分离条件, $\mathcal{H}$ 维数 s 不大于 1. 可以证明 $\mathcal{H}^s(S) = \sqrt{2}^s$.

(3) 这个定理可以向高维推广, 即在 $m(m > 2)$ 维立方体中, 向每个顶点作平行坐标超平面的相似比相同的相似压缩, 得到自相似集 (亦用 S 表示), 使得 $\dim_{\mathcal{H}}(S) \leqslant 1$, 可以证明 [41] $\mathcal{H}^s = \sqrt{m}^s$.

2.5 两 个 猜 测

前面给出了中间三分 Cantor 集和 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值的计算, 它们的 $\mathcal{H}$ 维数都不大于 1, 其计算已经够复杂的了, 但不管怎样, 毕竟还是可以计算的. 下面将讨论 $\mathcal{H}$ 维数不小于 1(非整数) 的情形, 其 $\mathcal{H}$ 测度的计算的复杂度似乎又上了一个台阶, 被公认 "太难", 因此无人问津. 事实上, 至今还没有一个这样的分形的 $\mathcal{H}$ 测度被计算出来. 准确值难以计算, 只好退而求其次, 这就导致 $\mathcal{H}$ 测度的上、下限的估计问题. 相对而言, 因为有了 "部分估计原理", 上限的估计较下限的估计要简单一些. 先从两个关于 $\mathcal{H}$ 测度的猜测的讨论开始.

1987 年, 加拿大学者 Marion 对 Sierpinski 垫片 S(例 1.1.2) 和 Koch 曲线 K(例 1.1.3) 的 $\mathcal{H}$ 测度准确值提出如下猜测, 这可以认为是首次对 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 的情形的探讨 [15].

猜测 2.5.1 $\mathcal{H}^s(S) = \frac{1}{6}3^s > 0.9508$, $\dim_{\mathcal{H}}(S) = \lg 3/\lg 2 \leqslant 1.5850$.

猜测 2.5.2 $\mathcal{H}^s(K) = \frac{1}{4}2^s > 0.5995$, $\dim_{\mathcal{H}}(K) = \lg 4/\lg 3 \leqslant 1.2619$.

在这两个猜测提出后近 10 年没有任何进展, 既没有被证明, 也没有被否定. 本书利用 "部分估计原理" 先后否定了它们. 下面先讨论 Sierpinski 垫片 S.

定理 2.5.3 符号同上, 则 $\mathcal{H}^s(S) < 0.9105 < 0.9508 < \frac{1}{6}3^s$.

证明 设猜测 2.5.1 成立. S_0 有 27 个 3 拷贝 (参见图 2.5.1). 令去掉 3 个顶点上的 3 拷贝后的 24 个 3 拷贝之并为 U(即图 2.5.1 中六边形 $ABCDEF$). 易见 $|U| = 7/8$. 显然

$$\mathcal{H}^s(S \cap U) = \frac{24}{27}\mathcal{H}^s(S) \geqslant \frac{24}{27} \times 0.9508 \approx 0.8452.$$

但 $|U|^s = |\frac{7}{8}|^s \leqslant 0.8093$, 即得

$$\mathcal{H}^s(S \cap U) > |U|^s,$$

与 "局部估计原理" 矛盾. 这就否定了猜测 2.5.1.

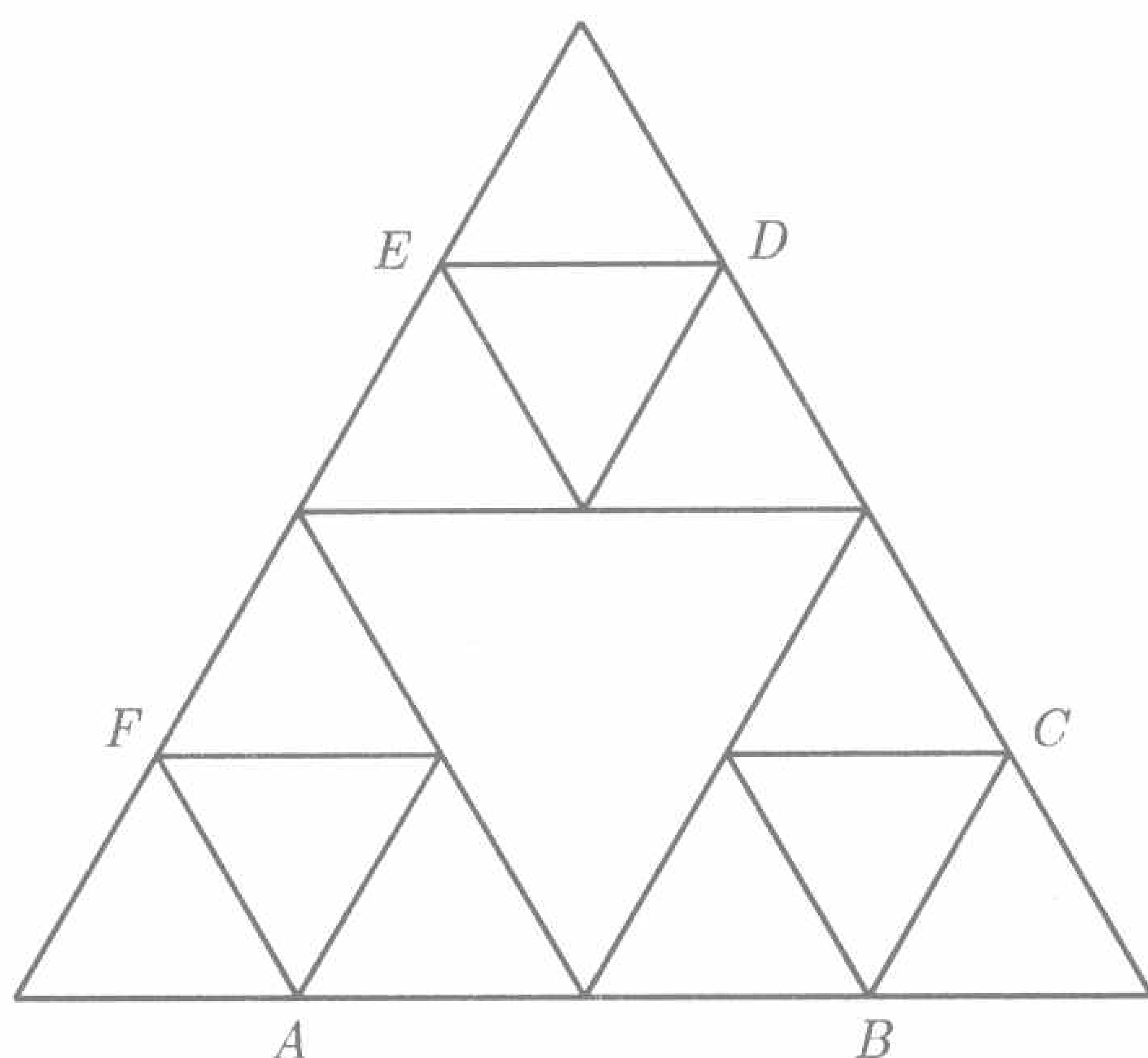


图 2.5.1 Sierpinski 垫片 (2 拷贝)

为了给出一个较好的上限, 构造 S 的覆盖如下:

(1) S_2 由 9 个边长为 $\dfrac{1}{4}$ 的 2 拷贝 (等边三角形) 组成 (参见图 2.5.1), 在 3 个顶点处的 3 个 2 拷贝和中间的 6 个 2 拷贝之并构成 S 的一个覆盖, 而后者的直径为 $\dfrac{3}{4}$. 因此

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant 3\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{3}{4}\right)^s = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}3^s.$$

(2) S_3 由 27 个边长为 $\dfrac{1}{8}$ 的 3 拷贝组成, 在 3 个顶点处的 3 个 3 拷贝和中间的 24 个 3 拷贝之并 (即图 2.5.2 中的六边形 $ABCDEF$) 构成 S 的一个覆盖, 而后者的直径为 $\dfrac{7}{8}$. 因此

$$\mathcal{H}^s_{\frac{7}{8}}(S) \leqslant 3\left(\frac{1}{8}\right)^s + \left(\frac{7}{8}\right)^s = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{27}7^s.$$

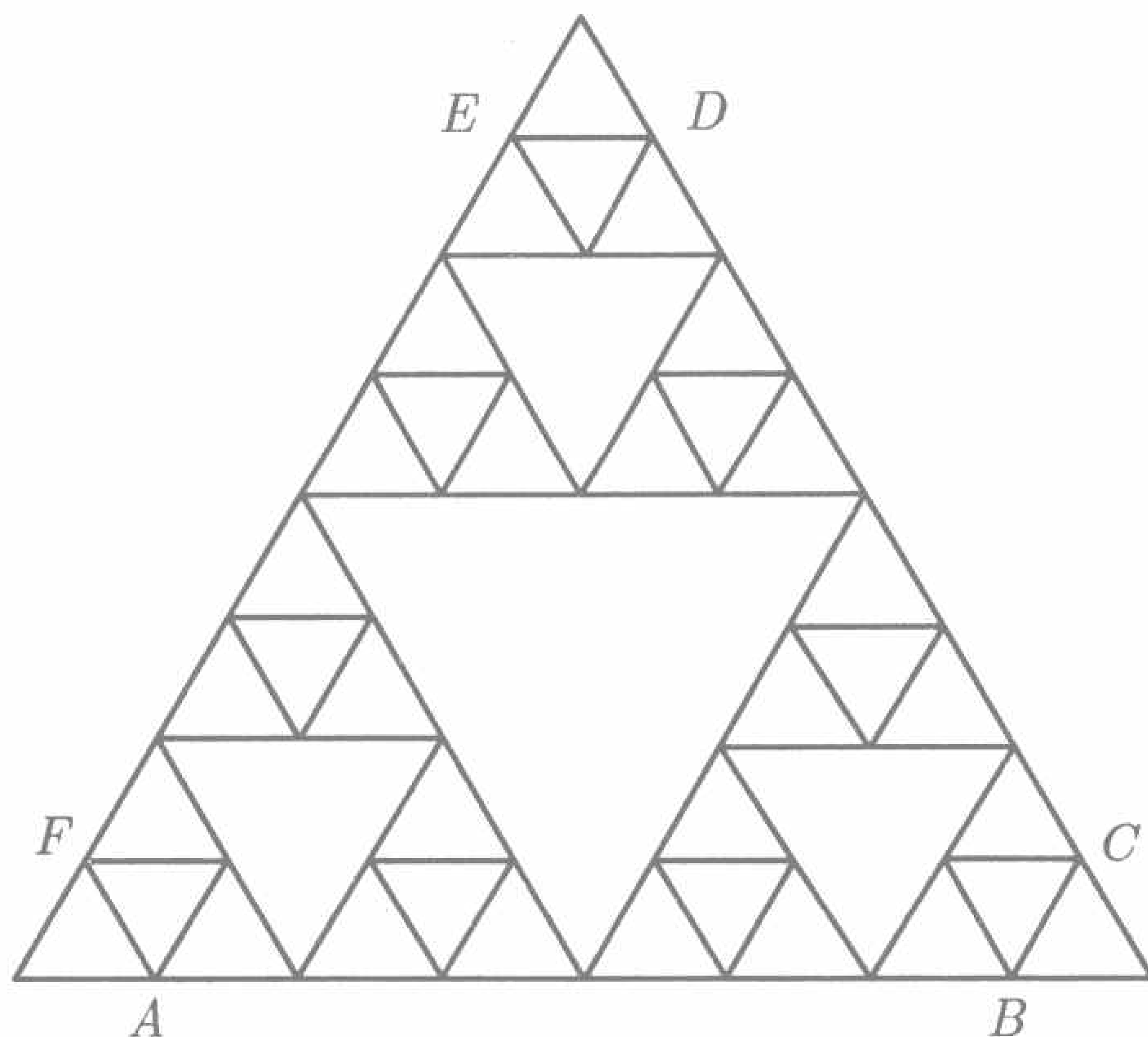


图 2.5.2 Sierpinski 垫片 (3 拷贝)

(3) 一般地, S_n 由边长为 $\frac{1}{2^n}$ 的 3^n 个 n 拷贝组成, 在 3 个顶点处的 3 个 n 拷贝和中间的 3^n-3 个 n 拷贝之并构成 S 的一个覆盖, 而后者的直径为 $\frac{2^n-1}{2^n}$. 因此

$$\mathcal{H}^s_{\frac{2^n-1}{2^n}}(S) \leqslant 3\left(\frac{1}{2^n}\right)^s + \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^s = \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}(2^n-1)^s.$$

(4) 把 (3) 中所描述的 S 的覆盖相似压缩 $2^k(k \geqslant 0)$ 倍, 得到 k 拷贝上的一个 $\frac{1}{2^{n+k}}$ 覆盖. 因此

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2^{n+k}}}(S) &\leqslant 3^k\left(3\left(\frac{1}{2^{n+k}}\right)^s + \left(\frac{1}{2^k}\frac{2^n-1}{2^n}\right)^s\right)\\ &= \frac{3^k}{3^{n+k-1}} + \frac{3^k}{3^{n+k}}(2^n-1)^s\\ &= \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}(2^n-1)^s.\end{aligned}$$

这个不等式的右端与 k 无关, 即具有上面所描述的覆盖加细不变性. 令 $k\to\infty$, 得到

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}(2^n-1)^s = \sigma_n, \quad \forall n > 1.$$

易见, 当 $n\to\infty$ 时, $\sigma_n \to 1$. 简单计算表明, 当 $n>2$ 时, σ_n 是随 n 而递升的. σ_n 的前 3 个值是

$$\sigma_2 \approx 0.9672; \quad \sigma_3 \approx 0.9204; \quad \sigma_4 \approx 0.9399.$$

因此

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}7^s < 0.9205.$$

在上述不等式中, $\frac{1}{9}$ 是由估计 S 的 $\frac{1}{9}$ 部分而得到, 利用 “部分估计原理”, 得到

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant \frac{1}{9}\mathcal{H}^s(S) + \frac{1}{3^3}7^s,$$

整理后即得

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant \frac{1}{24}7^s \leqslant 0.9105. \qquad \square$$

S_0 有 9 个 2 拷贝. 令去掉 3 个顶点上的 2 拷贝后的 6 个 2 拷贝之并依然为 U(参见图 2.5.1). Marion 提出上述错误猜测的原因是他事实上假设了 U 是 “部分估计原理” 的等式解, 即 $\mathcal{H}^s(S\cap U) = |U|^s$ 成立, 而实际上这个式子不是等式, 而是右端严格大于左端, 因此得到的值只是上限而非准确值. 很多文章进一步估计了 $\mathcal{H}^s(S)$ 的上限. 如文献 [31,33] 等, 其中文献 [33] 中得到

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant 0.8308.$$

另外, 有些文章对 $\mathcal{H}^s(S)$ 的下限进行估计, 如文献 [9] 等, 这是一件更复杂更困难也更繁琐的工作. 到目前为止, 最好的结果是 [45]

$$\mathcal{H}^s(S) \geqslant 0.6704.$$

现在讨论 Koch 曲线, 较之 Sierpinski 垫片, 它更复杂.

定理 2.5.4 符号同上. 则

$$\mathcal{H}^s(K) \leqslant 0.5890 < \frac{1}{4}2^s, \quad \dim_{\mathcal{H}}(K) = \lg 4/\lg 3 \approx 1.2619.$$

证明 [34] 下面是关于 K 的一些简单性质、记号和基本事实 (参见例 1.1.3).

(1) K 是由 4 个相似比为 1/3 的相似函数定义的自相似集且满足开集条件, $\dim_{\mathcal{H}}(K) = \lg 4/\lg 3$.

(2) K 是路径连通的. 设 $a, b \in K$, 记 $\widehat{ab}$ 为由 a 到 b 的连通弧.

(3) 设 $n \geqslant 1$, 易见 K_n 由 4^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的线段 (n 基本线段) 构成. 在每一个 n 基本线段上生成 Koch 曲线, 是一个与 K 相似的集合, 相似比为 $\frac{1}{3^n}$, 称作 $\frac{1}{3^n}$-Koch 曲线, 记作 $\frac{1}{3^n}$-K. 据缩放比例性质, 有

$$\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3^n} - K\right) = \frac{1}{4^n}\mathcal{H}^s(K).$$

(4) 设 $n \geqslant 1$, K_n 中夹角为 60° 的相邻两边构成一个正三角形, 称作 K_n 的基本三角形 (或 K 的 n 拷贝), 记作 $\triangle_n$. 易于归纳算出, $\triangle_n$ 的外接圆的直径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}$. 再者, 易于看出, $\triangle_n$ 的 (实, 闭) 外接圆覆盖组成 $\triangle_n$ 的 K_n 的 2 个 n 基本线段上生成的 $\frac{1}{3^n} - K$.

(5) 易见, $K \cap K_0$ 是中间三分 Cantor 集 C. 已知

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \lg 2/\lg 3 < 1,$$

因此

$$\mathcal{H}^s(K \cap K_0) = 0.$$

下面构造 K 的一个几乎处处覆盖如下:

K_1 只有 1 个 1 拷贝 $\triangle_1$, 外接圆为 $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right)$, 其中 $\frac{2\sqrt{3}}{3^2}$ 为它的直径 (下同). 记

$$\alpha_1 = \left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right)\right\}.$$

K_2 有 2 个 2 拷贝不为 $\alpha_1=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right)\right\}$ 所覆盖, 分别记为 $B_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)$ 和 $B_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)$. 记

$$\alpha_2=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right);\ B_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right);\ B_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)\right\}.$$

为简便起见, 称 α_2 由 1 个 $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right)$ 和 2 个 $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)$ 组成, 并记为

$$\alpha_2=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right);\ 2B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)\right\}.$$

K_3 中有 2^2 个 3 拷贝不为 α_2 所覆盖. α_2 中元素与 2^2 个 3 拷贝的外接圆一起记作

$$\alpha_3=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right);\ 2B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right);\ 2^2B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^4}\right)\right\}.$$

设 $n>3$, 归纳地, 可以得到

$$\alpha_n=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right);\ 2B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right);\ 4B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^4}\right);\cdots;2^{n-1}B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}\right)\right\},$$

其中 $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}\right)$ 是 K_n 中不被 α_{n-1} 覆盖的 n 拷贝 $\triangle_n$ 的外接圆, 这样的外接圆共有 2^{n-1} 个.

按归纳法得到

$$\alpha=\left\{B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right);\ 2B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right);\ 4B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^4}\right);\ \cdots;\ 2^{n-1}B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}\right);\ \cdots\right\}.$$

易见, α 中元素两两不相交; $K-K\cap K_0$ 中每一点都属于 α 中某一元素, 事实上, 只有 K_0 的两个端点没有被 α 覆盖, 而且很容易看出, K 也只有这两点没有被 α 覆盖. 据 (5), α 是 K 的一个 $\mathcal{H}^s$ 几乎处处覆盖.

下面先证明 $\mathcal{H}^s(K)\leqslant\frac{1}{4}2^s$. 用 α 估计 $\mathcal{H}^s(K)$, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(K) &\leqslant \left(\frac{2\sqrt{3}}{3^2}\right)^s + 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^3}\right)^s + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}\right)^s + \cdots \\ &= 2\frac{2^s}{4^2} + 2^2\frac{2^s}{4^3} + \cdots + 2^n\frac{2^s}{4^{n+1}} + \cdots \\ &= 2\frac{2^s}{4^2}\left(1 + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{4^{n-1}} + \cdots\right) \\ &= 2\frac{2^s}{4^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}2^s.\end{aligned}$$

再证明 $\mathcal{H}^s(K) < \dfrac{1}{4}2^s$. 下面证明 $\mathcal{H}^s(K) = \dfrac{1}{4}2^s$ 导致矛盾 (参见图 2.5.3).

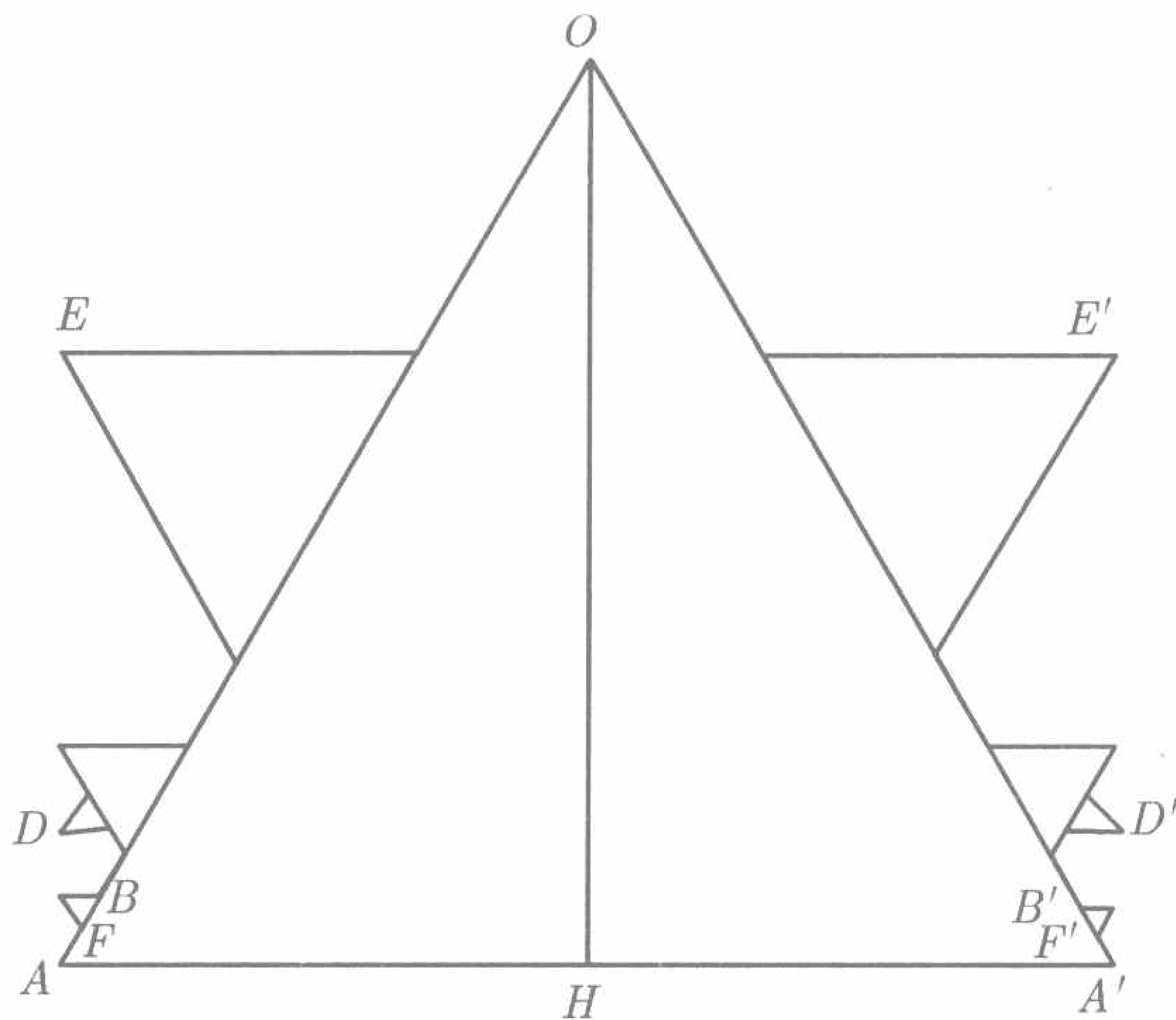


图 2.5.3 Koch 曲线 (局部)

在 AO 上取点 B, 使 $|AB| = 2|AO|/27$. 记 B' 为 B 关于 $\triangle AOA'$ 的底边 AA' 上的高 AH 的对称点. 易见, B 和 B' 分别是两个不同的 4 拷贝的顶点. 考虑 K 上的连通弧 $\widehat{BB'}$. 用 U 表示 (实, 闭) 七边形 $BDEOE'D'B'$. 易见 $K \cap U = \widehat{BB'}$.

下面证明 $|U| = |DE'|$. 先证 $|DE'| > |BE'|$.

注意到 $|AO| = 1/3$ 和 $|AB| = 2\sqrt{3}|AO|/27 = 2\sqrt{3}/81$, 容易得到下述数据:

$$|OH| = \sqrt{3}/6, \quad |AE| = \sqrt{3}/9, \quad |AF| = \sqrt{3}|AB|/2 = \sqrt{3}/81,$$

$$|DE| = 14/18|AE| = 14/18\sqrt{3}/9 = 7\sqrt{3}/81, \quad |EE'| = 1/3,$$

$$|BF| = |AB|/2 = 1/81, \quad |EF| = |AE| - |AF| = \sqrt{3}/9 - \sqrt{3}/81 = 8\sqrt{3}/81.$$

于是有

$$\begin{aligned}|DE'| &= \sqrt{|DE|^2 + |EE'|^2} = \sqrt{(7\sqrt{3}/81)^2 + 1/3^2} \\ &= \sqrt{147+729}/81 = \sqrt{876}/81 \approx 0.3654,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|BE'| &= \sqrt{|EF|^2 + (|EE'| - |BF|)^2} = \sqrt{(8\sqrt{3}/81)^2 + (1/3 - 1/81)^2} \\ &= \sqrt{192 + 676}/81 = \sqrt{868}/81 \approx 0.3637,\end{aligned}$$

因此 $|DE'| > |BE'|$.

由初等几何易于证明, U 上任意两点的距离不大于 $|DE'|$, 因此 $|DE'|$ 是 U 的直径.

易于计算, $\widehat{BB'}$ 由 122 个 $\dfrac{1}{3^4} - K$ 生成. 据 (3), 有

$$\mathcal{H}^s(K \cap U) = \mathcal{H}^s(\widehat{BB'}) = \frac{122}{4^4}\mathcal{H}^s(k) = \frac{122}{4^4}\frac{1}{4}2^s \approx 0.2857.$$

但是

$$|U|^s = |DE'|^s = (\sqrt{876}/81)^s \approx 0.2807.$$

因此

$$\mathcal{H}^s(K \cap U) > |U|^s,$$

这与 "部分估计原理" 矛盾. □

这就否定了猜测 2.5.2. 事实上, 据 "部分估计原理", 有

$$\mathcal{H}^s(K \cap U) = 122\mathcal{H}^s(K)/4^4 \leqslant |U|^s,$$

因此

$$\mathcal{H}^s(K) \leqslant \frac{4^4}{122}|U|^s = \frac{4^4}{122}\left(\frac{\sqrt{876}}{81}\right)^s \approx 0.5890 < 0.5995.$$

这是一个较好的上限估计, 当然还可以进一步加以改进. 在文献 [43] 中, 得到下限估计:

$$\mathcal{H}^s(K) > 0.5.$$

其证明将在下面给出.

Marion 的错误是把 Koch 曲线的中间 2 个 1 拷贝加上底边所构成的三角形的外接圆当成了相应 "部分估计原理" 的等式解, 而事实上却不是, 因而他得到的值是一个上限, 而非准确值.

我们在本书前言中说, 否定 Marion 的两个猜测是本书的源头. 所谓源头, 是指从它将有 "活水" 源源而至. 事实上, 本书所有内容都是从否定这两个猜测引申出来的. 首先, 这两个猜测被否定之后, 一个自然的问题是, 它们的准确值是什么和如何计算? 进而, 这个问题也可以对一般满足开集条件的自相似集提出, 这就引出后面关于满足开集条件的自相似集的一般讨论. 关于 $\mathcal{H}$ 测度计算, 能直接计算出准确值或给出它们的计算公式自然最好, 但非常困难, 例如, 至今还没有一个 $\mathcal{H}$ 维数

(非整数) 大于 1 的被计算出的例子. 另一种方法是估计它们的上、下界, 因为最好的上、下界自然就是准确值. 下一节讨论 $\mathcal{H}$ 测度的上、下限估计问题, 而寻求准确值的努力放在下两章讨论. 本书的重点是后者.

2.6 满足开集条件的自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度估计

事实上, 上节在否定 Marion 的两个猜测时已经给出了相应的 $\mathcal{H}$ 测度的上限估计. 就否定两个猜测的目的而言, 我们已经完成了任务, 但对于估计上限则只是开了一个头, 因为我们的结果并不是最好的. 本节以 3 个经典自相似集: Sierpinski 垫片 S(例 1.1.2) 、$C\times C$(图 1.1.4(a)) 和 Koch 曲线 (例 1.1.3) 为例给出它们的较好的 $\mathcal{H}$ 测度的上、下限的估计. 这是一项既困难又繁琐的工作, 耐心是不可须臾或缺的. 潜心的读者将会从中体会到困难的症结所在, 而我们在以后就是从这些症结出发寻求深入研究的出路. 本节的结果以后将会有所应用.

先估计 Sierpinski 垫片的 $\mathcal{H}$ 测度的上限.

定理 2.6.1 *设 S 表示 Sierpinski 垫片. 则*

$$\mathcal{H}^s(S)\leqslant 0.8498,\quad \dim_{\mathcal{H}}(S)=\log 3/\log 2.$$

证明 记 $S_0=\triangle ABC$ 为生成 S 的正三角形 (见图 2.6.1).

在三边上截取

$$|AD_x|=|BE_x|=|BF_x|=|G_xC|=|CH_x|=|I_xA|=x,\quad x\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

得到正三角形 $\triangle AD_xI_x$,$\triangle BF_xE_x$,$\triangle CH_xG_x$, 以及一个六边形

$$U_{1-x}=D_xE_xF_xG_xH_xI_x,$$

其中 $1-x$ 是它的直径. 易见

$$\{U_{1-x};\triangle AD_xI_x,\triangle BF_xE_x,\triangle CH_xG_x\}$$

是 S 的一个覆盖. 记边长为 x 的正三角形为 $\triangle_x$, 上述覆盖可以简记为

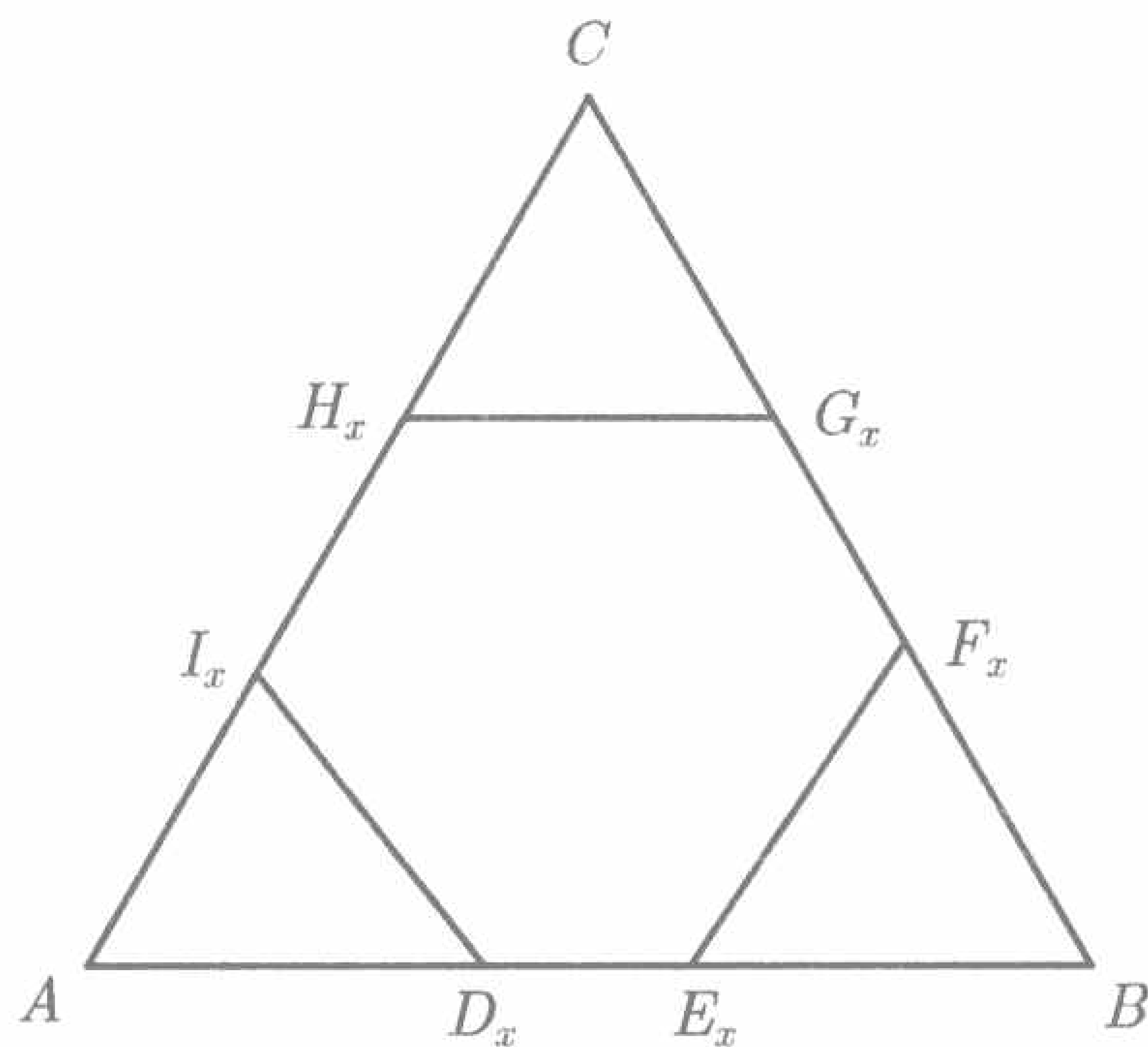


图 2.6.1 Sierpiski 垫片

$$\alpha_{1-x}=\{U_{1-x};3\triangle_x\}.$$

记 CU_{1-x} 是 U_{1-x} 的凸闭包. 当 U_{1-x} 确定后 CU_{1-x} 完全确定, 且它们有相同的直径. 令

$$f(x)=\frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S\cap U_{1-x})}|U_{1-x}|^s,$$

称为约化计算模型. 据 "部分估计原理" 总有

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$$

令

$$\bar{f}(x) = \frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap CU_{1-x})}|CU_{1-x}|^s,$$

称为计算模型. 显然

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant f(x) \leqslant \bar{f}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$$

设 x_0 使

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \inf\left\{\frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap U_{1-x})}|U_{1-x}|^s, 0 \leqslant x \leqslant 1/2\right\} \\ &= \frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap U_{1-x_0})}|U_{1-x_0}|^s, \end{aligned}$$

又设 x_1 使

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \inf\left\{\frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap CU_{1-x})}|CU_{1-x}|^s, 0 \leqslant x \leqslant 1/2\right\} \\ &= \frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap CU_{1-x_1})}|CU_{1-x_1}|^s. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_1) &= \frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap CU_{1-x_1})}|CU_{1-x_1}|^s \\ &\geqslant f(x_0) \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap U_{1-x_1})}|U_{1-x_1}|^s. \end{aligned}$$

寻求 x_0 或 x_1(不知道它们是否相等) 是非常困难的. x_0 的一个较好近似值是 (计算过程从略)$1 - \dfrac{77821}{3 \times 2^{15}}$, 由约化计算模型可得

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant 0.8701, \quad s = \dim_{\mathcal{H}}(S) = \log 3/\log 2 \approx 1.584962501.$$

再通过计算 (计算过程亦从略)

$$\frac{\mathcal{H}^s(S)}{\mathcal{H}^s(S \cap CU_{1-x_1})}|CU_{1-x_1}|^s,$$

得

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant 0.8498.$$

□

上述结果还可以改进, 可以证明 [34]

$$\mathcal{H}^s(S) \leqslant 0.8308.$$

下面估计 $\mathcal{H}^s(S)$ 的下限.

定理 2.6.2 $\mathcal{H}^s(S) \geqslant 0.6704$.

为了证明这个定理, 先做一些准备.

设 S_0 是单位正三角形, 并记 Λ 为所有正六边形的集合. 限制用 Λ 中元素构成 S 的覆盖, 可以定义 S 的一个新测度并用 $\mathcal{M}^s(S)$ 表示, 有

引理 2.6.3 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^s \mathcal{M}^s(S) \leqslant \mathcal{H}^s(S) \leqslant \mathcal{M}^s(S)$.

证明 据定义, 右边不等式是明显的. 下面证明左边不等式. 据文献 [22] 中的定理 12.4, 平面任意直径为 1 的集合可用边长为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的一个正六边形覆盖. 如果 $\{U_i, i > 0\}$ 是 S 的一个 δ 覆盖, 则存在 S 的正六边形覆盖 $\{U_i', i > 0\}$, 使得 $|U'_i| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}|U_i|$. 因此

$$\mathcal{M}^s_\delta(S) \leqslant \left(\sum_{i>0} |U_i'|^s\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^s \sum_{i>0} |U_i|^s.$$

令 $\delta \to 0$, 得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s \mathcal{M}^s(S) \leqslant \mathcal{H}^s(S). \qquad \square$$

在 S 上定义一个质量分布如下:

$$\begin{cases} \mu(S_0) = 1, \\ \mu(\triangle_n) = \dfrac{1}{3^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots, \\ \mu(S_0 - S) = 0. \end{cases}$$

引理 2.6.4 *设 μ 定义如上. $s = \dim_{\mathcal{H}}(S) = \log 3/\log 2$. 若存在 $c > 0, \delta > 0$, 满足 $\mu(V) \leqslant c|V|^s, \forall\ V \in \Lambda, |V| \leqslant \delta$, 则*

$$\mathcal{M}^s(S) \geqslant \frac{\mu(S)}{c}.$$

证明 设 $\{U_i : U_i \in \Lambda, i > 0\}$ 是 S 的一个 δ 覆盖, 则

$$0 < \mu(S) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i>0} U_i\right) \leqslant \sum_{i>0} \mu(U_i) \leqslant c \sum_{i>0} |V_i|^s.$$

对覆盖取下确界, 并令 $\delta \to 0$, 即得 $\mathcal{M}^s(S) \geqslant \dfrac{\mu(S)}{c}$. □

建立直角坐标系如图 2.6.2 所示.

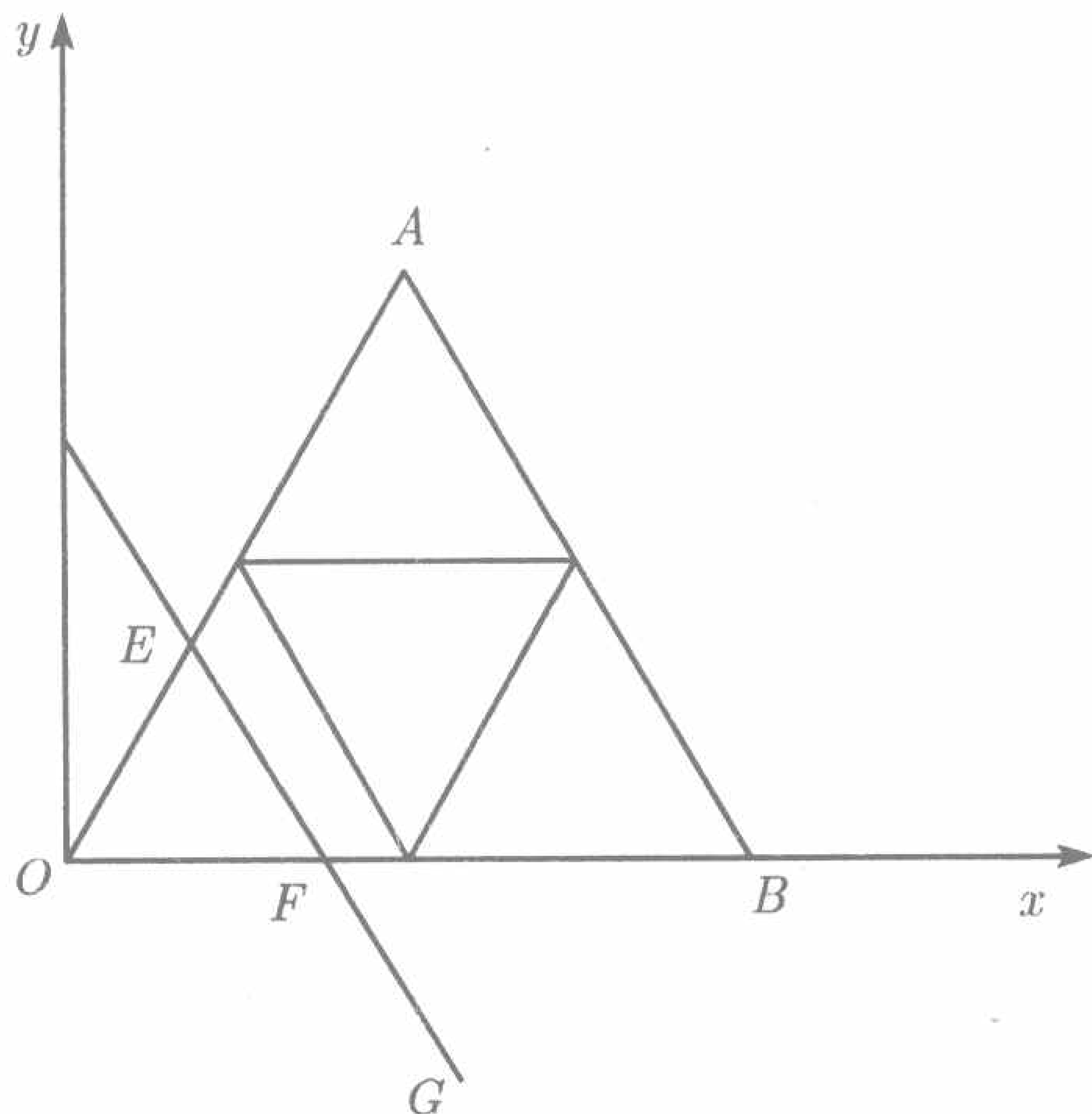


图 2.6.2　坐标系

设直线 G 与 AB 边平行并与 S_0 相交, E, F 分别是 G 与 OA, OB 的交点. 记 $|OF| = g$, 并记 $\triangle_g$, 为由 OA, OB, G 构成的三角形.

引理 2.6.5 [9]　$\mu(\triangle_g) \geqslant 0.812545g^s, 0 < g \leqslant 1$.

如果用 1 个 2^n 拷贝 S_n 代替 S_0, 引理依然成立, 即

$$\mu(\triangle_g) \geqslant 0.81254g^s, \quad 0 < g \leqslant 2^{-n}.$$

设直线 T 与 OA 边平行并与 S_0 相交, D, E 分别是其与 OB, AB 边的交点 (参见图 2.6.3).

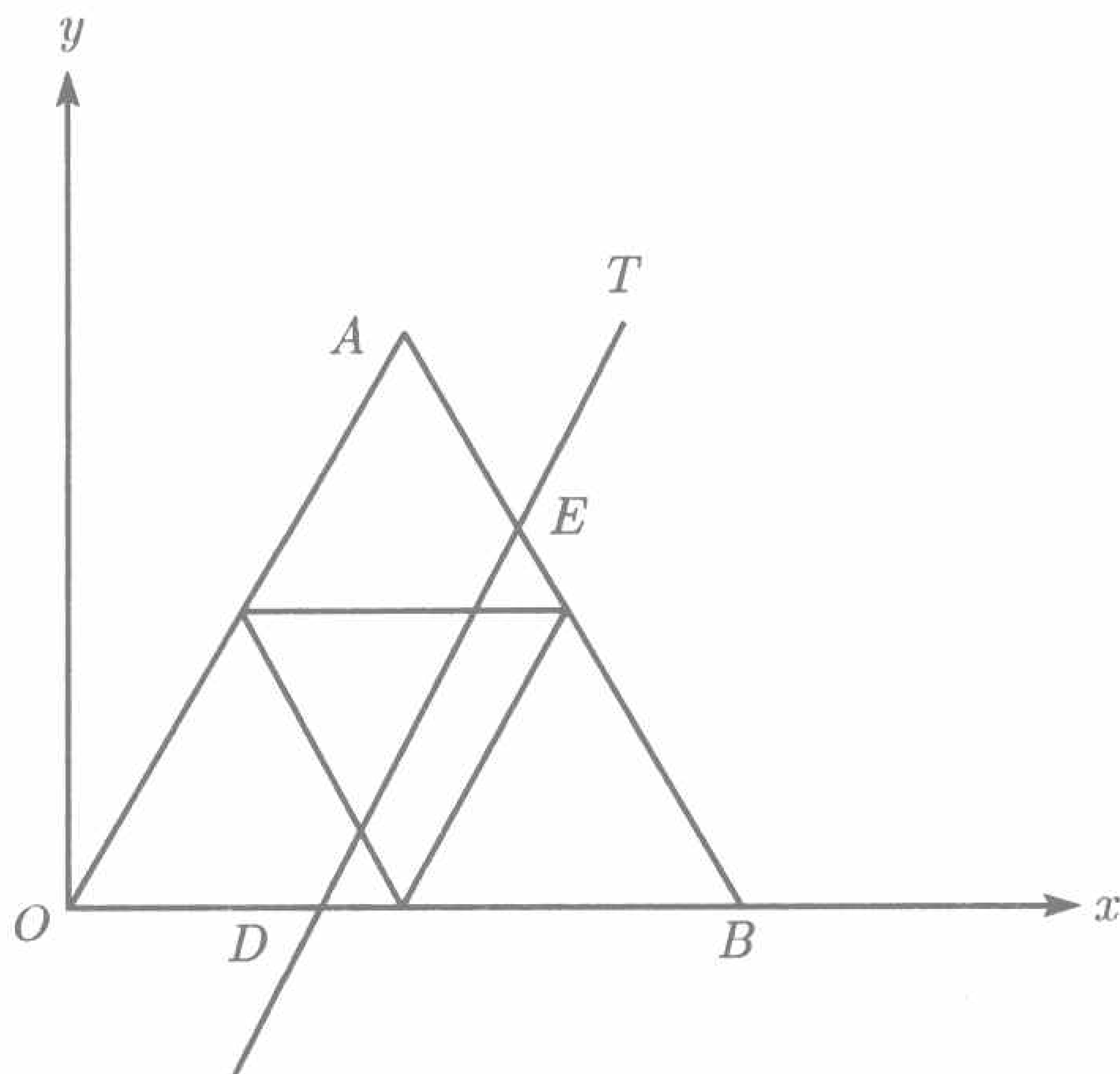


图 2.6.3　函数 $f(t) = \dfrac{\mu(\Omega_t)}{t^s}, 0 \leqslant t \leqslant 1$

记 $|OD| = t$, 并用 Ω_t 表示等腰梯形 $ODEA$.

引理 2.6.6 $\mu(\Omega_t) \geqslant t^s, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

证明 因为 $\mu(\Omega_t)$ 是 t 的连续函数, 只要证明当 t 是线段 OB 的 $2^n(n>1)$ 的分点即可. 令 $\mu(t) = \mu(\Omega_t)$, 于是

$$\begin{cases} \mu(0) = 0, \\ \mu\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}, \\ \mu(1) = 1. \end{cases}$$

用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, $\dfrac{1}{2}$ 是 OB 的 2 等分点, 有

$$\frac{\mu\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^s} = \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{3}} = 2 > 1.$$

设当 t 是 OB 的一个 2^n 分点时引理成立, 下面证明当 t 是 OB 的 2^{n+1} 一个分点时引理亦成立. 当 $t = \dfrac{2k}{2^{n+1}}$ 时, t 是 OB 的一个 $\dfrac{1}{2^n}$ 分点, 引理成立. 设 $t = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$, 有递推公式:

$$\mu\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}\mu\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{k+1}{2^n}\right), \quad n = 0, 1, \cdots; k = 1, 2, \cdots, 2^n - 1.$$

由归纳假设并据文献 [9] 的命题 11, 通过简单计算可得

$$\frac{\mu\left(\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right)^s} \geqslant \frac{k^2 + 2(k+i)^s}{(2k+1)^s} \geqslant 1.$$

归纳步骤完成, 引理得证. □

定理 2.6.7 符号同上. 则

$$\mathcal{M}^s(S) \geqslant 0.8421052.$$

建立如图 2.6.2 所示的直角坐标系, 设 S 相似压缩函数系为 $\{S_0, S_1, S_2\}$. 有下面的引理.

引理 2.6.8 设集合 V 与 S 相交且 $|V| > 0$, μ 是上面定义的质量分布, 则

$$\frac{\mu(V \cap S)}{|V|^s} = \frac{\mu(S_i(V \cap S))}{\dfrac{1}{3}|V|^s}, \quad i = 0, 1, 2.$$

证明从略.

引理 2.6.9　对任意 $V \in \Lambda$, 有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

证明　设 $V \cap S_0 \neq \varnothing$, G_1, G_2, G_3 是三条分别与 V 三边重合的直线 (见图 2.6.4), 它们分别平行 AB, OA, OB. 不妨设 G_1, G_2, G_3 都与 S_0 相交. 据自相似性, 仅需要考虑下面三种情形.

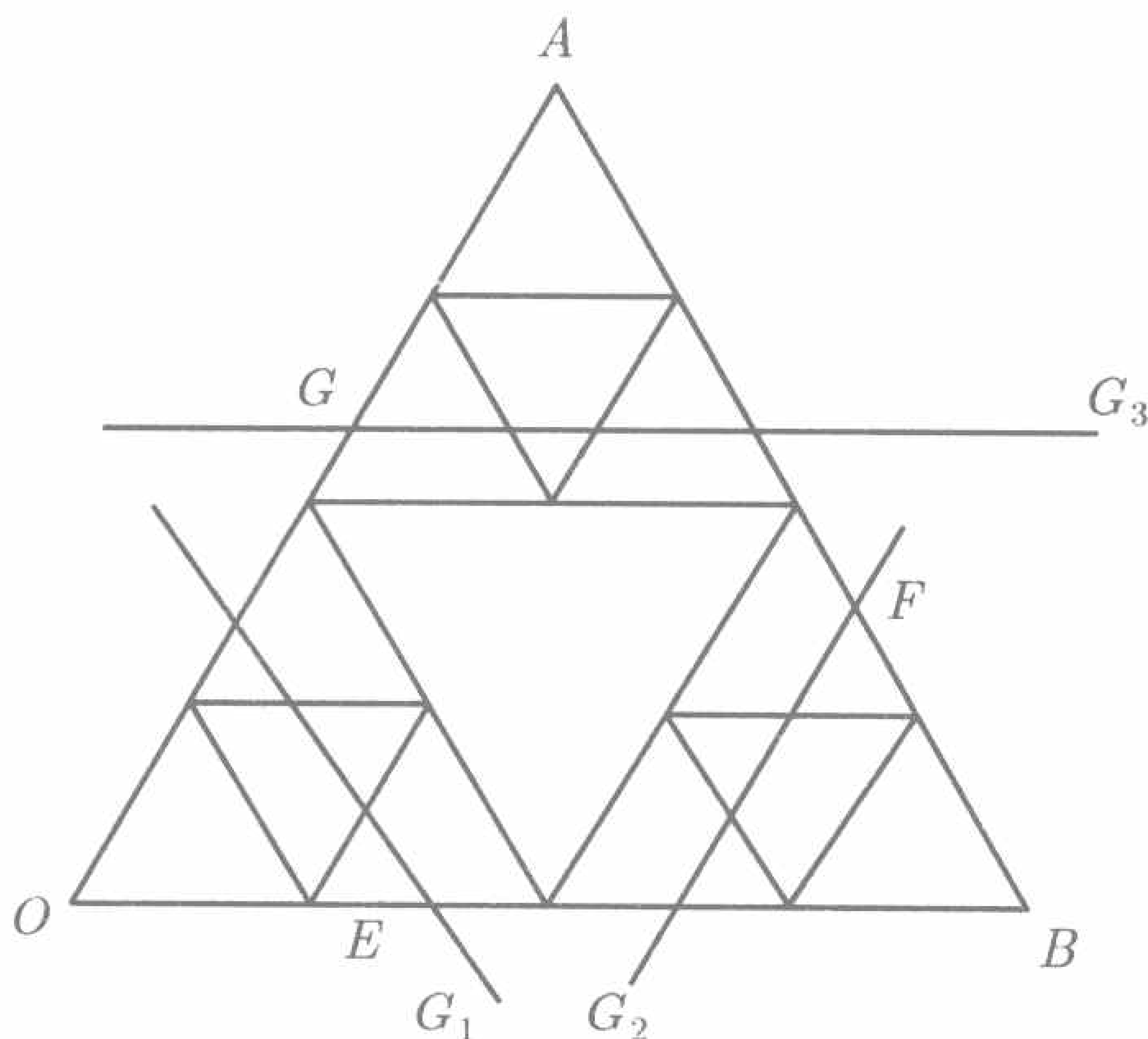


图 2.6.4　V 与 3 个 1 拷贝相交

(1) V 与 3 个 1 拷贝均相交 (见图 2.6.4). 设 E, F, G 分别是 G_1 与 OB, G_2 与 AB, G_3 与 OA 的交点. 记 $|OE| = g_1$, $|BF| = g_2$, $|AG| = g_3$. 因为 $V \in \Lambda$, 易见

$$|V| = \frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3).$$

据引理 2.6.5, 有

$$\mu(V) \leqslant 1 - \mu(g_1) - \mu(g_2) - \mu(g_3) \leqslant 1 - 0.812545(g_1^s + g_2^s + g_3^s).$$

设三元函数

$$f(g_1, g_2, g_3) = 1.1875\left(\frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3)\right)^s + 0.812545(g_1^s + g_2^s + g_3^s),$$

$$0 \leqslant g_i \leqslant \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

对三个自变量取偏导数, 且使 $f'_{g_1} = f'_{g_2} = f'_{g_3} = 0$. 简单计算, 可得稳定点:

$$g_1^0 = g_2^0 = g_3^0 = \frac{4}{6 + 3\left(\dfrac{3 \times 0.812545}{2 \times 1.1875}\right)^{\frac{1}{s-1}}} \approx 0.437804.$$

设

$$D = \left\{(g_1, g_2, g_3) : 0 \leqslant g_i \leqslant \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3\right\}.$$

下面证明 f 在 D 上的极小值大于 0. 事实上, 有 $f(g_1^0, g_2^0, g_3^0) \approx 0.002396$. 取 f 的 2 阶导数, 有

$$\begin{aligned} f''_{g_i} =& \frac{4 \times 1.1875 s(s-1)}{9} \left(\frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3)\right)^{s-2} \\ &+ 0.8112545 s(s-1) g_i^{s-2} > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

这说明 (g_1^0, g_2^0, g_3^0) 是 f 在 D 上唯一极小值, 故在 D 上 $f(g_1, g_2, g_3) > 0$, 于是得

$$\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s.$$

(2) V 与 2 个 1 拷贝相交. 不失普遍性, 可设 V 与 OB 边上的那两个相交 (见图 2.6.5). 下面分六种情况.

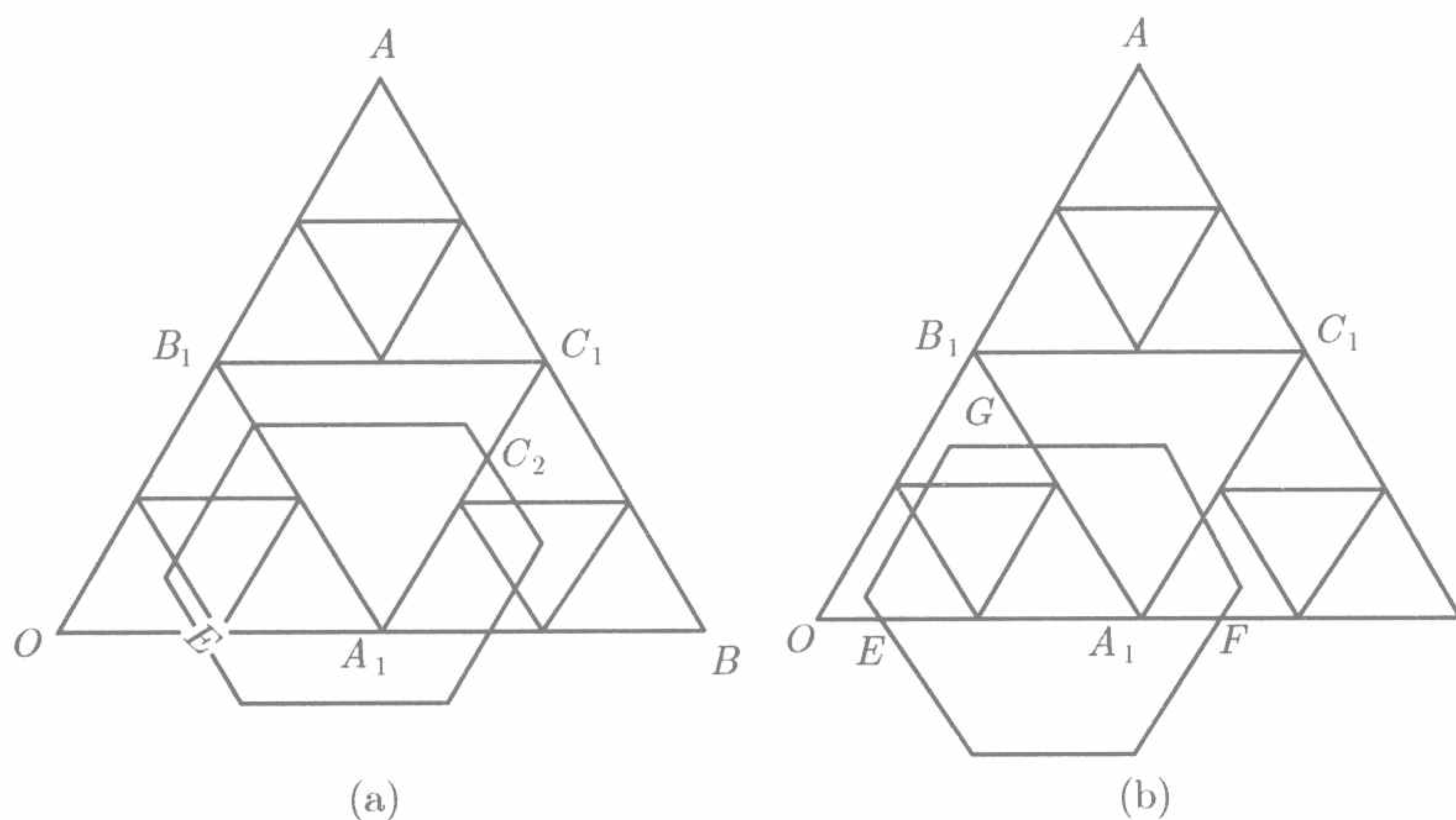


图 2.6.5 V 与 2 个 1 拷贝相交

(i) 当 $0 \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} \leqslant g_3 \leqslant \frac{3}{4}$, 于是

$$|V| = \frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3).$$

另一方面, 分别对 $f_1f_3(S_0)$, $f_2f_3(S_0)$, $f_1f_1(S_0)$, $f_2f_2(S_0)$ 应用引理 2.6.5, 有

$$\begin{aligned} \mu(V) \leqslant& \left(\frac{2}{9} - 2 \times 0.812545 \left(g_3 - \frac{1}{2}\right)^s\right) + \left(\frac{4}{9} - 0.812545(g_1^s - g_2^s)\right) \\ =& \frac{2}{3} - 2 \times 0.812545 \left(g_3 - \frac{1}{2}\right)^s - 0.812545(g_1^s + g_2^s). \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} f(g_1, g_2, g_3) =& 1.1875 \left(\frac{2}{3}(2 - (g_1 + g_2 + g_3))\right)^s + 2 \times 0.812545 \left(g_3 - \frac{1}{2}\right)^s \\ &+ 0.812545(g_1^s + g_2^s) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

借助简单的分析可知, f 有唯一的稳定点

$$g_1^0 = g_2^0 = \frac{3}{3\left(\dfrac{3 \times 0.812545}{2 \times 1.1875}\right)^{\frac{1}{s-1}} + 4 + 2^{\frac{s-2}{s-1}}} \approx 0.387195,$$

$$g_3^0 = 2^{\frac{1}{1-s}} g_1^0 + \frac{1}{2} \approx 0.618390.$$

因为

$$(g_1^0, g_2^0, g_3^0) \bar{\in} D_1 = \left\{(g_1, g_2, g_3) : 0 \leqslant g_i \leqslant \frac{1}{4}, i = 1, 2; \frac{1}{2} \leqslant g_3 \leqslant \frac{3}{4}\right\}.$$

一个简单的计算指出: 在 D_1 上

$$f(g_1, g_2, g_3) \geqslant f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, g_3^0\right) \approx 0.080569 > 0.$$

于是得 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

(ii) 当 $0 \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant g_3 \leqslant \frac{3}{4}$ 时, V 可能与 $f_1(S_0)$, $f_2f_1(S_0)$, $f_2f_3(S_0)$ 相交.

如果 V 与 $f_2f_3(S_0)$ 相交 (见图 2.6.5(a)), 设 E, C_2 分别是 V 的边与 OA_1, A_1C 的交点. 记 $|OE| = g$,$|C_1C_2| = t$, 则 $V = 1 - g - t$. 另一方面, 据引理 2.6.5 和引理 2.6.6, 有

$$\mu(V) \leqslant \frac{5}{9} - 0.812545g^s - t^s.$$

设

$$f(g, t) = 1.1875(1 - g - t)^s + 0.812545g^s + t^s - \frac{5}{9}.$$

简单分析可知, 在闭区域

$$D_{21} = \left\{(g, t) : 0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{4}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}\right\}$$

上, $f(g, t) > 0$. 于是有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

如果 V 不与 $f_2f_3(S_0)$ 相交, 即可能与 $f_0(S_0)$, $f_2f_1(S_0)$ 相交 (见图 2.6.5(b)), 有

$$|V| = \frac{2}{3}(2 - g_1 - g_2 - g_3).$$

另一方面, 分别对 $f_1f_1(S_0)$, $f_2f_1(S_0)$, $f_1f_3(S_0)$ 应用引理 2.6.5, 有

$$\mu(V) \leqslant \frac{4}{9} - 0.812546\left(g_1^s + \left(g_2 - \frac{1}{4}\right)^s\right) - 0.812545\left(g_3 - \frac{1}{2}\right)^s.$$

记

$$f(g_1,g_2,g_3)=1.1875\left(\frac{2}{3}(2-g_1-g_2-g_3)\right)^s+0.812545\left(g_1^s+\left(g_2-\frac{1}{4}\right)^s\right)$$
$$+0.812545\left(g_3-\frac{1}{2}\right)^s-\frac{4}{9}.$$

借助一个简单分析可知, 在闭区域

$$D_{22}=\left\{(g_1,g_2,g_3):0\leqslant g_1\leqslant\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\leqslant g_2\leqslant\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\leqslant g_3\leqslant\frac{3}{4}\right\}$$

上, $f(g_1,g_2,g_3)>0$. 于是有 $\mu(V)\leqslant 1.1875|V|^s$.

(iii) 当

$$\frac{1}{4}\leqslant g_1\leqslant\frac{1}{2};\quad \frac{1}{4}\leqslant g_2\leqslant\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}\leqslant g_3\leqslant\frac{3}{4}$$

时, V 可能与 $f_1f_2(S_0)$, $f_1f_3(S_0)$, $f_2f_1(S_0)$, $f_2f_3(S_0)$ 相交.

如果 V 与它们全相交, 在图 2.6.6(a) 中, 设 B_2, C_2, M_1, N_1 分别是 V 的边与 QB_1, SC_1, A_1M, A_1N 的交点.

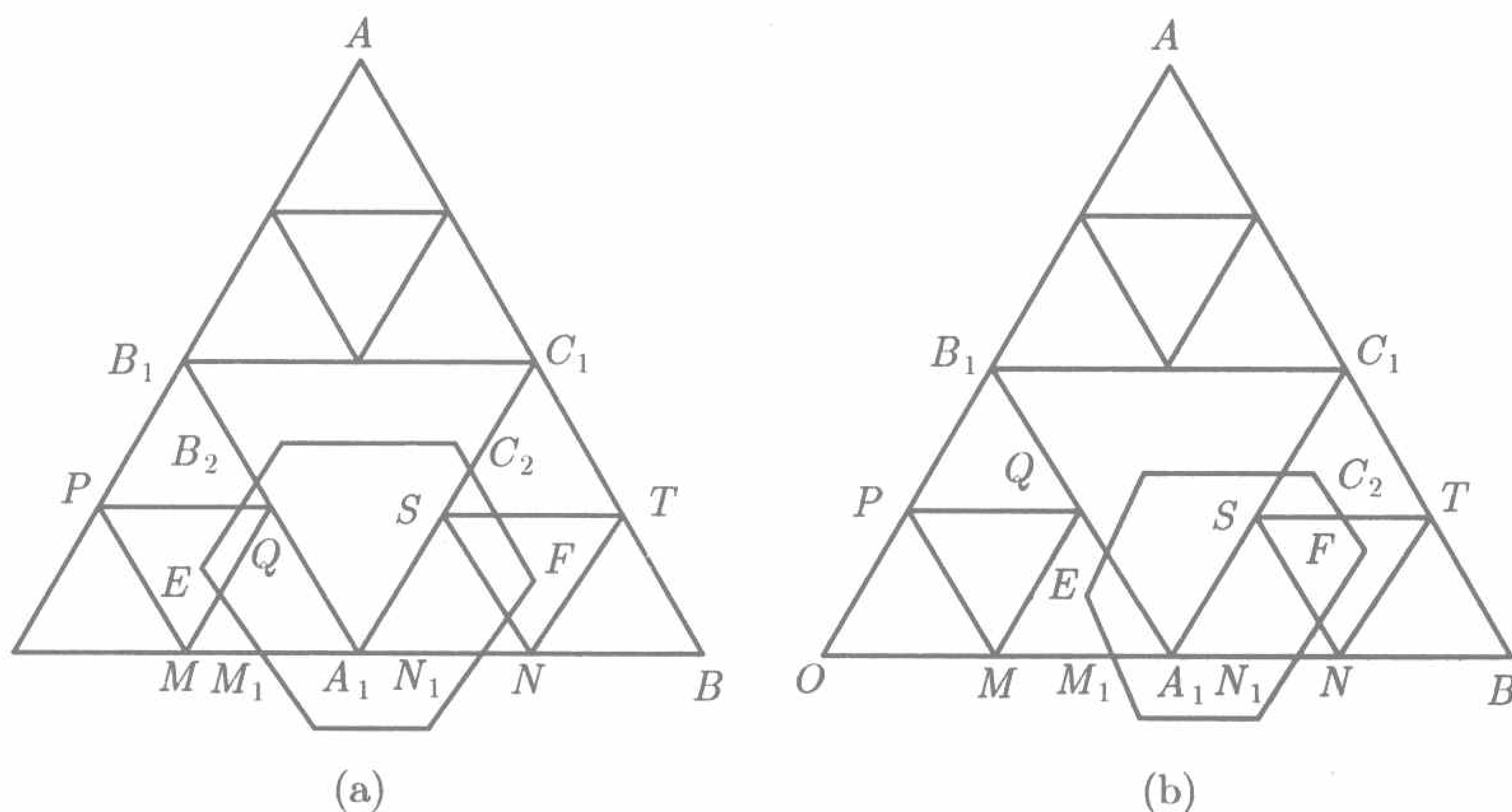


图 2.6.6 V 与 2 个 1 拷贝相交

记 $|B_1B_2|=t_1$, $|C_1C_2|=t_2$, $|MM_1|=h_1, |N_1N|=h_2$. 据引理 2.6.5 和引理 2.6.6, 易见

$$|V|=\frac{3}{4}-\left(\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{2}+\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)$$

和

$$\mu(V)\leqslant\frac{4}{9}-t_1^s-t_2^s-0.812545(h_1^s+h_2^s).$$

记

$$f(t_1,t_2,h_1,h_2)=1.1875\times\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{2}+\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)^s$$
$$+t_1^s+t_2^s+0.812545(h_1^s+h_2^s)-\frac{4}{9}.$$

借助一个简单分析可知, 在闭区域

$$D_{31}=\left\{(t_1,t_2,h_1,h_2):0\leqslant t_i\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant h_i\leqslant\frac{1}{4},i=1,2\right\}$$

上, $f(t_1,t_2,h_1,h_2)>0$. 于是有 $\mu(V)\leqslant 1.1875|V|^s$.

如果 V 仅与

$$f_1f_2(S_0);\quad f_2f_1(S_0);\quad f_2f_3(S_0)$$

相交, 在图 2.6.6(b) 中, 设 M_1, C_2 分别是 V 的边与 A_1M, ST 的交点. 记

$$|MM_1|=g;\quad |TC_2|=t,$$

据前面讨论, 可得

$$|V|=\frac{3}{4}-g-t,\quad \mu(V)\leqslant\frac{1}{3}-0.812545g^s-t^s.$$

记

$$f(g,t)=1.1875\left(\frac{3}{4}-g-t\right)+0.812545g^s+t^s-\frac{1}{3}.$$

借助一个简单分析可知, 在闭区域

$$D_{32}=\left\{(g,t):0\leqslant g\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\right\}$$

上, $f(g,t)>0$. 于是有 $\mu(V)\leqslant 1.1875|V|^s$.

如果 V 仅与 $f_1f_2(S_0)$, $f_2f_1(S_0)$ 相交, 这种情形与下面的 (vi) 相同.

(iv) 设

$$0\leqslant g_1\leqslant\frac{1}{4};\quad \frac{1}{8}\leqslant g_2\leqslant\frac{1}{4};\quad \frac{3}{4}\leqslant g_3\leqslant 1.$$

如果 $0\leqslant g_1\leqslant\frac{1}{8}$, $0\leqslant g_2\leqslant\frac{1}{8}$, 有

$$|V|\geqslant\frac{3}{4},\quad \mu(V)\leqslant\frac{4}{9},$$

那么

$$\mu(V)\leqslant 1.1875|V|^s.$$

如果 $0 \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{8}$, $\frac{1}{8} \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{4}$, 有

$$|V| \geqslant \frac{5}{8}, \quad \mu(V) \leqslant \frac{11}{27},$$

亦有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$. 如果

$$\frac{1}{8} \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{8} \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{4},$$

有

$$|V| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \mu(V) \leqslant \frac{10}{27},$$

亦有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

(v) 设

$$0 \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4} \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{4} \leqslant g_3 \leqslant 1.$$

可知 V 仅仅与

$$f_1f_1(S_0); \quad f_1f_2(S_0); \quad f_2f_1(S_0)$$

相交 (见图 2.6.7).

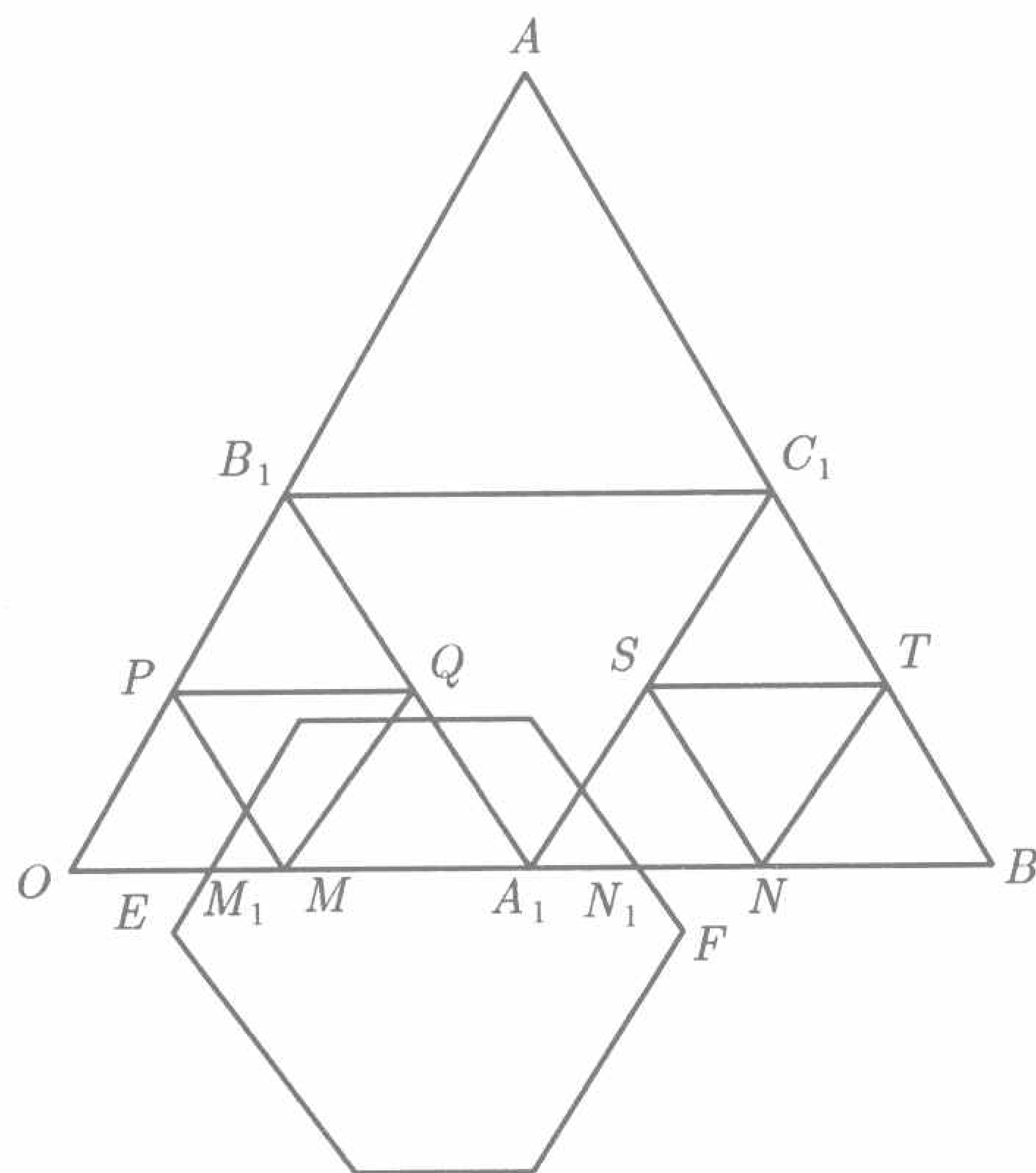


图 2.6.7 V 与 3 个 2 拷贝相交

设 M_1, N_1 分别是 V 的边与 OM, A_1M 的交点. 记

$$|OM_1| = g, \quad |NN_1| = t,$$

据引理 2.6.5 和引理 2.6.6, 可得

$$|V| \geqslant \frac{3}{4} - g - t, \quad \mu(V) \leqslant \frac{1}{3} - 0.812545g^s - t^s.$$

记

$$f(g,t) = 1.1875\left(\frac{3}{4} - g - t\right)^s + 0.812545g^s + t^s - \frac{1}{3}.$$

借助一个简单的分析可知, 在闭区域

$$D_5 = \left\{(g,t) : 0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{4},\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}\right\}$$

上, $f(g,t) > 0$. 于是有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

(vi) 设

$$\frac{1}{4} \leqslant g_1 \leqslant \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4} \leqslant g_2 \leqslant \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{4} \leqslant g_3 \leqslant 1,$$

则 V 仅与

$$f_1 f_2(S_0); \quad f_2 f_1(S_0)$$

相交. 与上述讨论相同, 可得 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$, 但有例外, 即 V 仅与

$$f_1 f_2 f_2(S_0); \quad f_2 f_1 f_1(S_0)$$

相交. 用归纳法可以证明, V 仅与

$$f_1 f_2 \cdots f_2(S_0); \quad f_2 f_1 \cdots f_1(S_0), \quad n > 1$$

相交时, $\mu(V) \leqslant \dfrac{2}{3^{n+1}}$. 令 $n \to \infty$, 亦有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$.

(3) 如果 V 仅与 1 个 1 拷贝相交, 重复上述讨论, 亦有 $\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s$. 一个例外是 V 仅与 1 个 n 拷贝相交, $n > 1$, 但这时有 $\mu(V) \leqslant \dfrac{1}{3^{n+1}}$. 令 $n \to \infty$, 亦有

$$\mu(V) \leqslant 1.1875|V|^s.$$

引理 2.6.9 至此证毕. □

定理 2.6.7 的证明　据引理 2.6.5 和引理 2.6.8, 有

$$\mathcal{M}^s(S) \geqslant \frac{\mu(S)}{1.1875} = \frac{1}{1.1875} > 0.8421052.$$

由引理 2.6.8 和引理 2.6.4 得

$$\mathcal{H}^s(S) \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s \times 0.8421052 \geqslant 0.670432.$$

定理 2.6.7 得证. □

这个结果改进了文献 [9] 的结果, 是当前最好的结果.

下面讨论 $C \times C$.

定理 2.6.10

$$1 \leqslant \mathcal{H}^{\log_3 4}(C \times C) \leqslant 1.502879.$$

为了证明这个定理, 先证明一些命题和引理.

命题 2.6.11 设 $s = \log_3 4$, 则

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $(1-x)^s + x^s \geqslant \frac{2}{2^s}$.

(2) 对任何 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, \infty)$, 有

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^s \leqslant \frac{1}{2}(x_1^s + x_2^s),$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4})^s \leqslant \frac{x_1^s + x_2^s + x_3^s + x_4^s}{4}.$$

证明 (1) 令

$$f(x) = (1-x)^s + x^s,$$

则

$$f^{'}(x) = -s(1-x)^{s-1} + sx^{s-1},$$

$$f^{''}(x) = s(s-1)(1-x)^{s-2} + s(s-1)x^{s-2} \geqslant 0.$$

因此 $f(x)$ 在 [0,1] 上是凹函数且当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2^s}$, 从而结论 (1) 成立.

由于 $g(x) = x^s$ 在 $(0, \infty)$ 上是凹函数, 从而结论 (2) 是显然的. □

命题 2.6.12 [31] 设 $F = C \times C, U \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集合且 $|U| > 0$, 则 $\mathcal{H}^s(F \cap U) \leqslant |U|^s$.

S_n 由 4^n 个边长为 $\frac{1}{3^n}$ 的正方形组成, 每个这样的正方形称为基本正方形或 n 拷贝, 记为 $\square_n$. S_0 亦记为 $\square_0$. 在 S_0 上定义分布函数 μ, 满足

$$\begin{cases} \mu(S_0) = 2^{\frac{s}{2}}, \\ \mu(S_n) = \dfrac{1}{4^n} \times 2^{\frac{s}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \\ \mu(S_0 - C \times C) = 0, \end{cases}$$

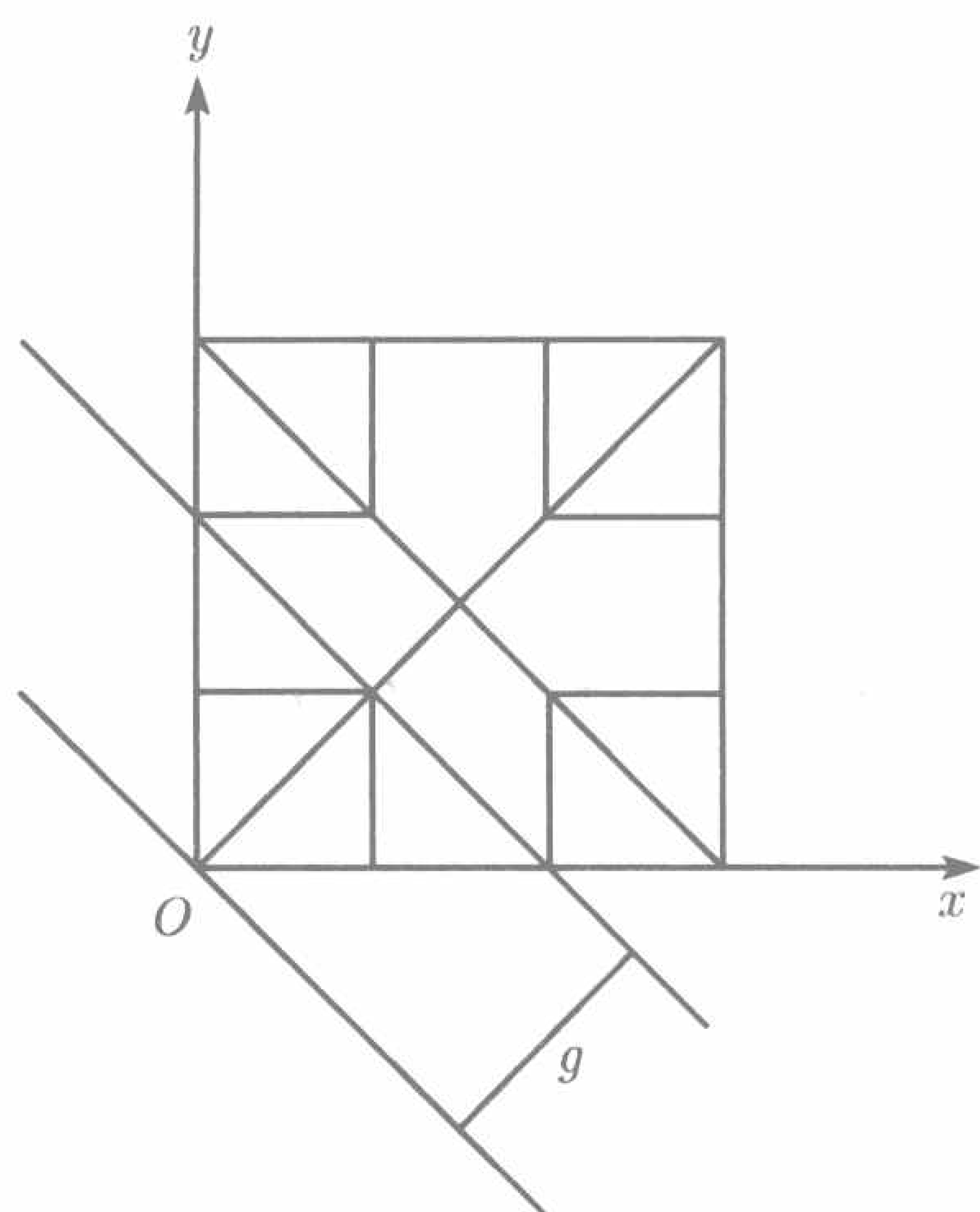


图 2.6.8　$C\times C$ 坐标系

则 μ 为 S_0 上一个测度且 μ 为 $C\times C$ 上的一个质量分布.

如图 2.6.8 建立直角坐标系, S_0 的主和斜对角线方程分别为

$$y=x,\quad y+x=1.$$

设 G 为平行于 S_0 的斜对角线且与 S_0 相交的直线, 记原点到 G 的距离 $d((0,0),G)=g\geqslant 0$. 记 G 与 x 轴, y 轴围成的三角形为 $\triangle_g$

引理 2.6.13　$\mu(\triangle_g)\geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}g^s$, $0\leqslant g\leqslant \frac{\sqrt{2}}{3}$.

证明　设

$$0<g\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3},$$

则存在正整数 n, 使

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}<g\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3^n}.$$

如图 2.6.9 所示, 直线 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 与斜对角线 OC 的交点分别为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. 考虑如下 6 种情况:

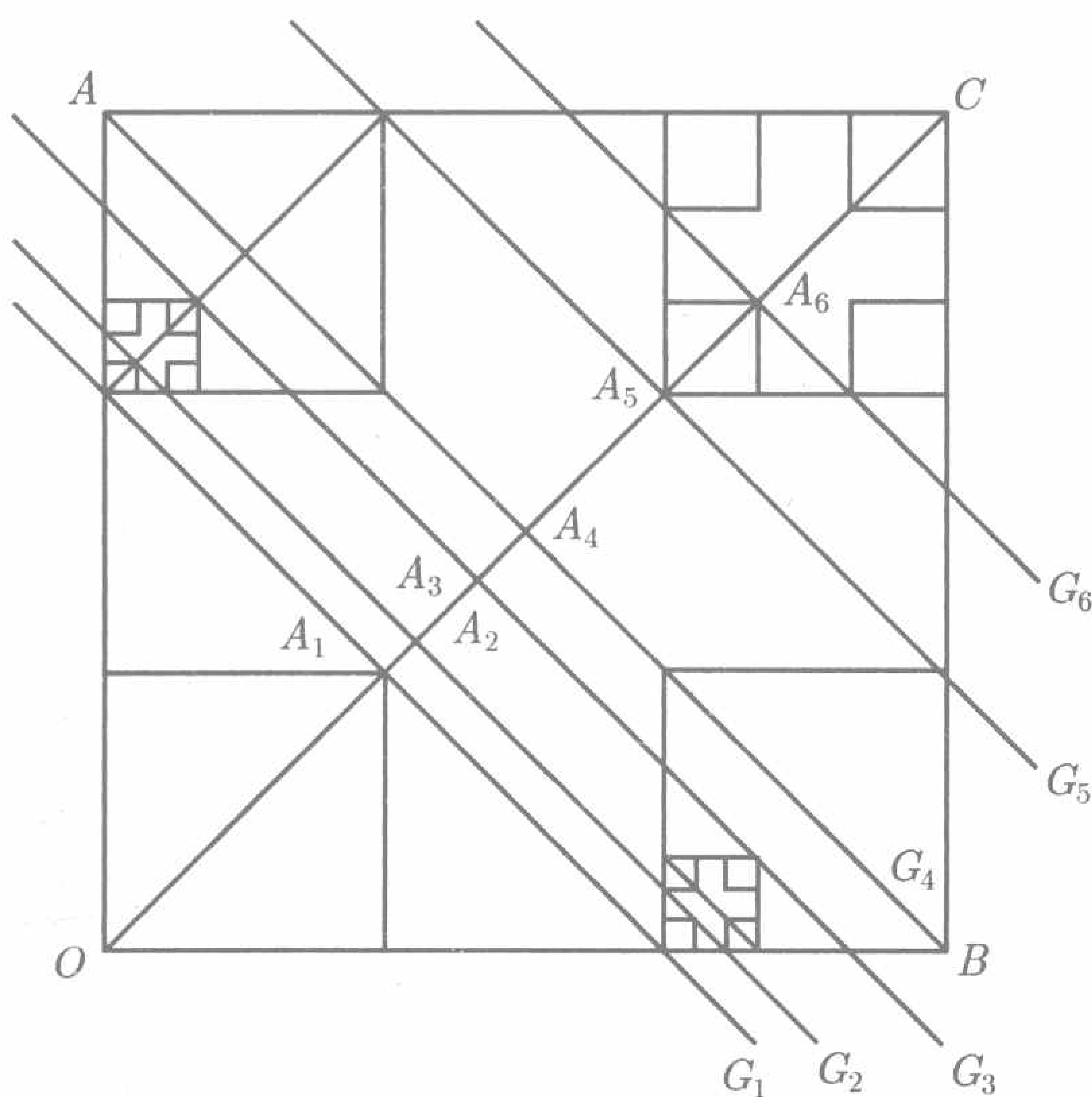


图 2.6.9　$C\times C$ 放大图

(1) 若 $|OA_1| < g \leqslant |OA_2|$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} < g \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{3^{n+3}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{10}{9},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \cdot \frac{10^s}{9^s},$$

且存在 $\square_{n+1} \in S_{n+1}$, 使 $\triangle_g \supset \square_{n+1}$, 从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \geqslant \frac{9^s}{10^s} \cdot g^s = \frac{16}{10^s} \cdot g^s \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} \cdot g^s.$$

(2) 若 $|OA_2| < g \leqslant |OA_3|$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{10}{9} \leqslant g \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{3^{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{4}{3},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{4^s}{4} \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}},$$

且在 S_{n+3} 中存在 $\square_{n+3}^{(1)}$ 和 $\square_{n+3}^{(2)}$, 使

$$\triangle_g \supset \square_{n+1} \cup \square_{n+3}^{(1)} \cup \square_{n+3}^{(2)},$$

从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} + \frac{2 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+2}} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \cdot \frac{9}{8} \geqslant \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{4^s} \cdot g^s \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} \cdot g^s.$$

(3) 若 $|OA_3| < g \leqslant |OA_4|$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{4}{3} < g \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3^n},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{1}{2^s} \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^n} = \frac{4}{2^s} \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}},$$

且在 S_{n+3} 存在 $\square_{n+2}^{(1)}$ 和 $\square_{n+2}^{(2)}$, 使

$$\triangle_g \supset \square_{n+1} \cup \square_{n+2}^{(1)} \cup \square_{n+2}^{(2)},$$

从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} + \frac{2 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+3}} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{2^s}{4} \cdot g^s \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} \cdot g^s.$$

(4) 若 $|OA_4| < g \leqslant |OA_5|$, 即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3^n} < g \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3^n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{3^n}\cdot\frac{2}{3},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}}\cdot 2^s,$$

且 $\triangle_g$ 包含 S_0 的斜对角线 $y+x=1$ 以下的三角形 OBA, 从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{2\cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \geqslant \frac{2}{2^s}\cdot g^s \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}\cdot g^s.$$

(5) 若 $|OA_5| < g \leqslant |OA_6|$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{3^n}\cdot\frac{2}{3} < g \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3^n}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3^{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}\cdot\frac{7}{3},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}}\cdot\frac{7^s}{4},$$

且 $\triangle_g$ 包含三个不相交的 $\square_{n+1}$, 从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{3\cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} \geqslant \frac{3\cdot 4}{7^s}g^s \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}g^s.$$

(6) 若 $|OA_6| < g \leqslant |OC|$, 即

$$\frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}\cdot\frac{7}{3} < g \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3^n},$$

则

$$g^s \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^n},$$

且 $\triangle_g$ 包含三个不相交的 $\square_{n+1}$ 和一个 $\square_{n+2}$, 从而有

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{2\cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+1}} + \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^{n+2}} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^n}\cdot\frac{13}{16} \geqslant \frac{13}{16}g^s \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}g^s.$$ □

引理 2.6.14　对任何可测集 V, 有 $\mu(V) \leqslant 2^{\frac{s}{2}}|V|^s$.

证明 不妨设 $V \subset S_0$, 否则用 $V \cap S_0$ 代替.

(1) 若 V 与 S_1 中 4 个 1 拷贝相交 (见图 2.6.10(a)), 作平行于主和斜对角线的直线 G_1, G_2, G_3, G_4 使 $V \subset \Box_V$, 且 V 与 $\Box_V$ 的四边形均相交, 其中, $\Box_V$ 为由直线 G_1, G_2, G_3, G_4 围成的矩形. 记距离

$$d((0,0)G_1) = g_1, \quad d((1,0)G_2) = g_2, \quad d((1,1)G_3) = g_3, \quad d((0,1)G_4) = g_4,$$

则

$$|V| \geqslant \sqrt{2} - g_1 - g_3, \quad |V| \geqslant \sqrt{2} - g_2 - g_4,$$

从而

$$|V| \geqslant \sqrt{2} - \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = \sqrt{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)\right],$$

由于

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} < 1,$$

从而由命题 2.6.12 和引理 2.6.11 知

$$\begin{aligned}
\frac{2^s}{2}|V|^s &\geqslant \frac{2^s}{2} \cdot 2^{\frac{s}{2}}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)\right]^s \\
&\geqslant \frac{2^s}{2} \cdot 2^{\frac{s}{2}}\left[\frac{2}{2^s} - 2^{\frac{s}{2}}\left(\frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}\right)^s\right] \\
&\geqslant 2^{\frac{s}{2}} - \frac{4^s}{2}\left(\frac{g_1^s + g_2^s + g_3^s + g_4^s}{4}\right)
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\mu(V) &\leqslant \sum_{k=1}^{4}\left[\frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} - \mu(\triangle_{g_k})\right] = 2^{\frac{s}{2}} - \sum_{k=1}^{4}\mu(\triangle_{g_k}) \\
&\leqslant 2^{\frac{s}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s}(g_1^s + g_2^s + g_3^s + g_4^s),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
2^{\frac{s}{2}}|V|^s - \mu(V) &\geqslant \frac{2^s}{2}|V|^s - \mu(V) \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} - \frac{4^s}{8}\right)(g_1^s + g_2^s + g_3^s + g_4^s) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(2) 若 V 与 S_1 中的 3 个 1 拷贝相交, 而与另一个不相交, 不妨设 V 与位于左上角的 1 拷贝不相交 (可参见图 2.6.10(a)), 则

$$|V| \geqslant \sqrt{2} - g_1 - g_3 = \sqrt{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2}(g_1+g_3)}{2}\right].$$

由命题 2.6.12 知

$$\begin{aligned} 2^{\frac{s}{2}}|V|^s \geqslant & 2^s\left[1 - \frac{\sqrt{2}(g_1+g_3)}{2}\right]^s \geqslant 2^s\left[\frac{2}{2^s} - 2^{\frac{s}{2}}(\frac{g_1+g_3}{2})^s\right] \\ \geqslant & 2 - \frac{2^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}(g_1^s + g_3^s). \end{aligned}$$

由引理 2.6.21 知

$$\begin{aligned} \mu(V) \leqslant & 3 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} - [\mu(\triangle_{g_1}) + \mu(\triangle_{g_2}) + \mu(\triangle_{g_3})] \\ \leqslant & 3 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s}(g_1^s + g_2^s + g_3^s). \end{aligned}$$

由于 $g_1^s + g_3^s \leqslant 2 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{3^s} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} 2^{\frac{s}{2}}|V|^s - \mu(V) \geqslant & 2 - 3 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} - \frac{2^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}\right)(g_1^s + g_3^s) + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} g_2^s \\ \geqslant & 2 - 3 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} - \frac{2^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}\right) \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s} g_2^s \\ \geqslant & 0.8384 - 0.832 > 0. \end{aligned}$$

(3) 若 V 仅与 S_1 中 2 个 1 拷贝 $\square_1, \square_1'$ 相交. 当 $\square_1, \square_1'$ 位于对角线上, 不妨设在主对角线上 (可参见图 2.6.10(a)), 则

$$|V| \geqslant \sqrt{2} - g_1 - g_3,$$

由 (2) 和引理 2.6.21 得

$$2^{\frac{s}{2}}|V|^s \geqslant 2 - \frac{2^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}(g_1^s + g_3^s),$$

$$\mu(V) \leqslant 2 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} - [\mu(\triangle_{g_1}) + \mu(\triangle_{g_3})] \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4^s}(g_1^s + g_3^s).$$

由于 $g_1^s + g_3^s \leqslant 2 \cdot \frac{2^{\frac{s}{2}}}{3^s} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{2}$, 从而

$$
\begin{aligned}
2^{\frac{s}{2}}|V|^s-\mu(V)&\geqslant 2-\frac{2^{\frac{s}{2}}}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}-\frac{2^s\cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}\right)(g_1^s+g_3^s)\\
&\geqslant 2-\frac{2^{\frac{s}{2}}}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4^s}-\frac{2^s\cdot 2^{\frac{s}{2}}}{2}\right)\frac{2^{\frac{s}{2}}}{2}\\
&\geqslant 1.225-0.833>0.
\end{aligned}
$$

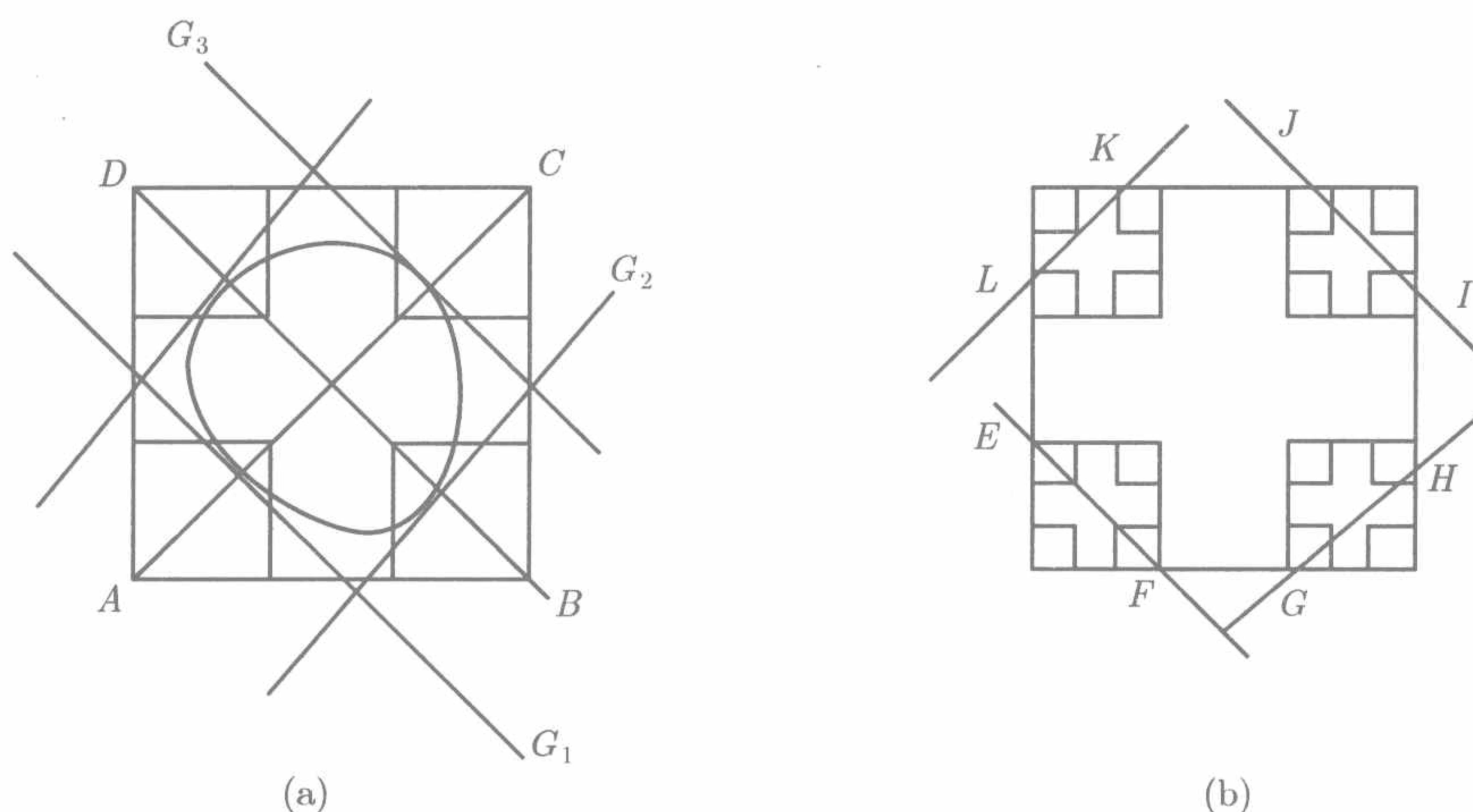


图 2.6.10 V 与 4 个基本正方形相交

当 $\square_1, \square_1'$ 位于 E_0 中同一条边上, 如图 2.6.11 所示, 记

$$a=\min\{x:(x,y)\in(\square_1\cup\square_1')\cap V\};\quad b=\max\{x:(x,y)\in(\square_1\cup\square_1')\cap V\},$$

则 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}\leqslant b\leqslant 1$, 由直线

$$x=a,\quad x=\frac{1}{3},\quad y=0,\quad y=\frac{1}{3}$$

围成的矩形记为 $\square_a$, 由直线

$$x=b,\quad x=\frac{2}{3},\quad y=0,\quad y=\frac{1}{3}$$

围成的矩形记为 $\square_b$, 则 $|V|\geqslant b-a$ 且 $\mu(V)\leqslant\mu(\square_a)+\mu(\square_b)$.

(1) 当

$$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{6};\quad \frac{2}{3}\leqslant b\leqslant 1$$

或

$$\frac{1}{6}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3};\quad \frac{5}{6}\leqslant b\leqslant 1$$

时 (见图 2.6.11(a), (b)), 有

$$|V|^s\geqslant(b-a)^s\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^s,$$

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_a) + \mu(\square_b) \leqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} + \frac{2 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{16} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{8},$$

故

$$\begin{aligned} 2^{\frac{s}{2}}|V|^s - \mu(V) &\geqslant 2^{\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s - \frac{3 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{8} = 2^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{2^s} - \frac{3}{8}\right) \\ &\geqslant 2^{\frac{s}{2}}(0.41667 - 0.375) > 0. \end{aligned}$$

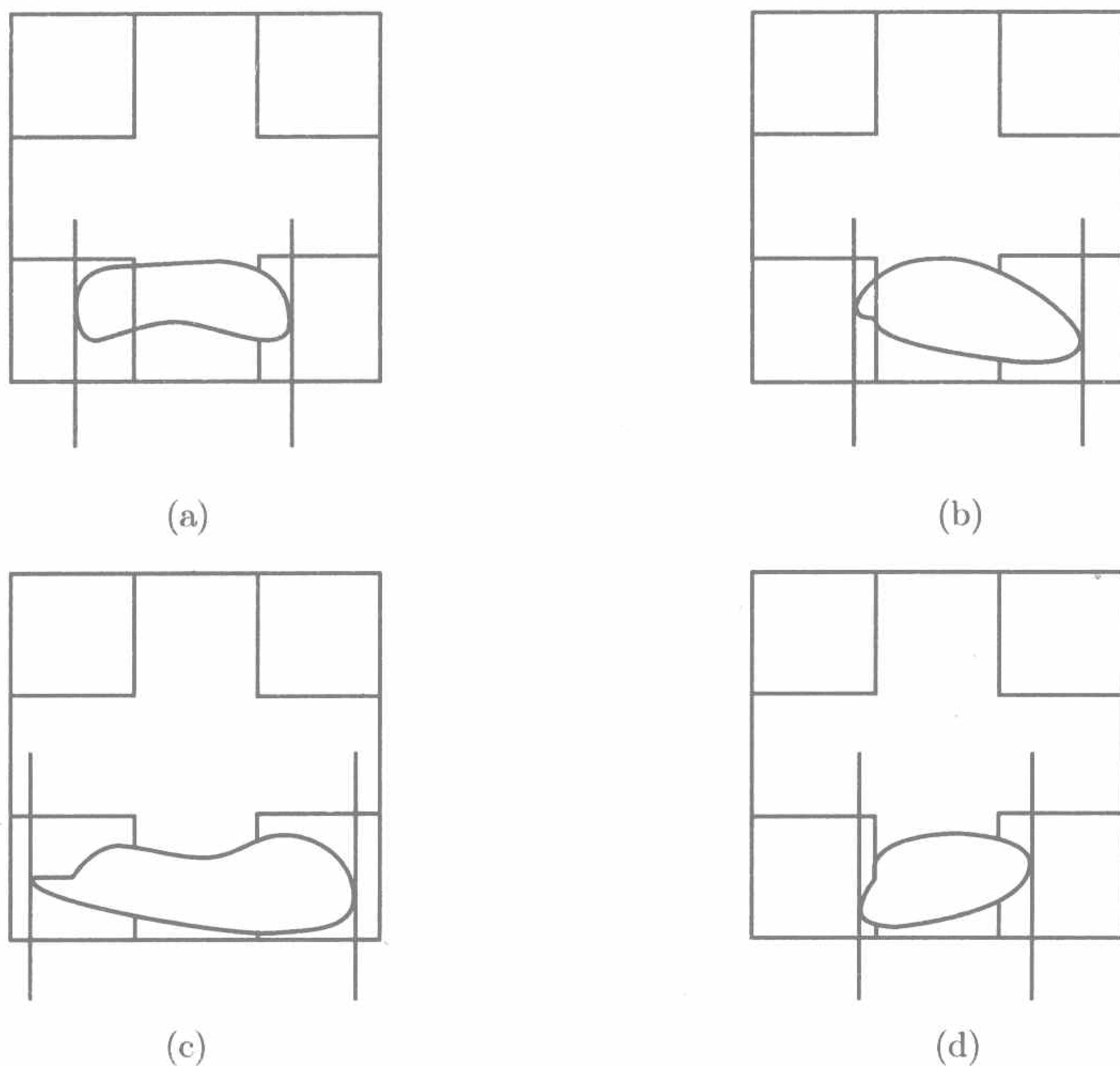


图 2.6.11 $C \times C$ 四个简图

(2) 当 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{6}$, $\frac{5}{6} \leqslant b \leqslant 1$ 时 (见图 2.6.11(c)), 有

$$|V|^s \geqslant (b-a)^s \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^s = \frac{2^s}{4},$$

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_a) + \mu(\square_b) \leqslant \frac{2 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4},$$

故

$$2^{\frac{s}{2}}|V|^s - \mu(V) \geqslant \frac{2^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{4} - \frac{2^{\frac{s}{2}}}{2} = 2^{\frac{s}{2}}\left(\frac{2^s}{4} - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

(3) 当 $\frac{1}{6} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \leqslant b \leqslant \frac{5}{6}$ 时 (见图 2.6.11(d)), 有

$$|V|^s \geqslant (b-a)^s \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{4},$$

$$\mu(V) \leqslant \mu(\square_a) + \mu(\square_b) \leqslant \frac{4 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{16} = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4},$$

故

$$2^{\frac{s}{2}}|V|^s - \mu(V) \geqslant \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} - \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4} = 0.$$

(4) 若 V 仅与 E_1 中 1 个 1 拷贝 $\square_1$ 相交, 则

$$\mu(V) = \mu(V \cap \square_1).$$

当 $V \cap \square_1$ 仅与 S_2 中 1 个 2 拷贝 $\square_2$ 相交, 则

$$\mu(V) = \mu(V \cap \square_2).$$

当 $V \cap \square_1$ 与 E_2 中 2 个、3 个、4 个 2 拷贝相交, 则由 (1)~(3) 知

$$\mu(V) = \mu(V \cap \square_1) \leqslant 2^{\frac{s}{2}}|V \cap \square_1|^s \leqslant 2^{\frac{s}{2}}|V|^s.$$

由数学归纳法知, 或者 $\mu(V) \leqslant 2^{\frac{s}{2}}|V|^s$, 或者存在 $\square_n \in S_n$, 使得

$$\mu(V) = \mu(V \cap \square_n) \leqslant \mu(\square_n) = \frac{2^{\frac{s}{2}}}{4^n}.$$

令 $n \to \infty$, 得 $\mu(V) = 0 \leqslant 2^{\frac{s}{2}}|V|^s$. □

定理 2.6.10 的证明 由质量分布原理 [5] 和引理 2.6.11 知

$$2^{\frac{s}{2}}\mathcal{H}^s(C \times C) \geqslant \mu(C \times C) = 2^{\frac{s}{2}}.$$

从而 $\mathcal{H}^s(C \times C) \geqslant 1$. 下面估计 $\mathcal{H}^s(C \times C)$ 的上界.

建立如图 2.6.9 所示的直角坐标系, 以正方形 S_0 的一个顶点 A 为坐标原点, 在正方形 S_0 的边上截取线段

$$\overline{AE} = \overline{AF} = 2x, \quad \overline{BG} = \overline{BH} = 2x, \quad \overline{CI} = \overline{CJ} = 2x, \quad \overline{DK} = \overline{DL} = 2x,$$

记八边形 $EFGHIJKL$ 为 U_x, 取

$$x = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^{12}},$$

则除 S_3 中的 4 个小正方形、S_6 的 8 个小正方形、S_9 中的 16 个小正方形以及 S_{12} 中的 32 个小正方形外, 其余的小正方形都被 U_x 覆盖, 从而由命题 2.6.12 得

$$\left[1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4^3} + \frac{2}{4^6} + \frac{4}{4^9} + \frac{8}{4^{12}}\right)\right] \mathcal{H}^s(C \times C) \leqslant \mathcal{H}^s((C \times C) \cap U_x) \leqslant |U_x|^s$$
$$\leqslant (\sqrt{1 + (1 - 4x)^2})^s.$$

即

$$\mathcal{H}^s(C\times C)\leqslant\frac{(\sqrt{1+(1-4x)^2})^s}{1-4\cdot\left(\frac{1}{4^3}+\frac{2}{4^6}+\frac{4}{4^9}+\frac{8}{4^{12}}\right)}.$$

计算可得 $\mathcal{H}^s(C\times C)\leqslant 1.502879$.

下面对上述得到的下界进行改进.

定理 2.6.15　$\mathcal{H}^{\log_3 4}(C\times C)\geqslant 1.48329$.

为了证明这个定理, 需作一系列准备.

命题 2.6.16 [21]　设 $s>1$, 则对任意 $x_i\in(0,\infty)(i=1,2,\cdots,n)$, 有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^s\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^s.$$

下面符号同定理 2.6.16. 在 $C\times C$ 上定义分布函数 μ, 满足

$$\begin{cases}\mu(S_0)=2^{\frac{s}{2}},\\ \mu(\square_n)=\dfrac{1}{4^n}\times 2^{\frac{s}{2}}, \quad n=1,2,3,\cdots,\\ \mu(S_0-C\times C)=0,\end{cases}$$

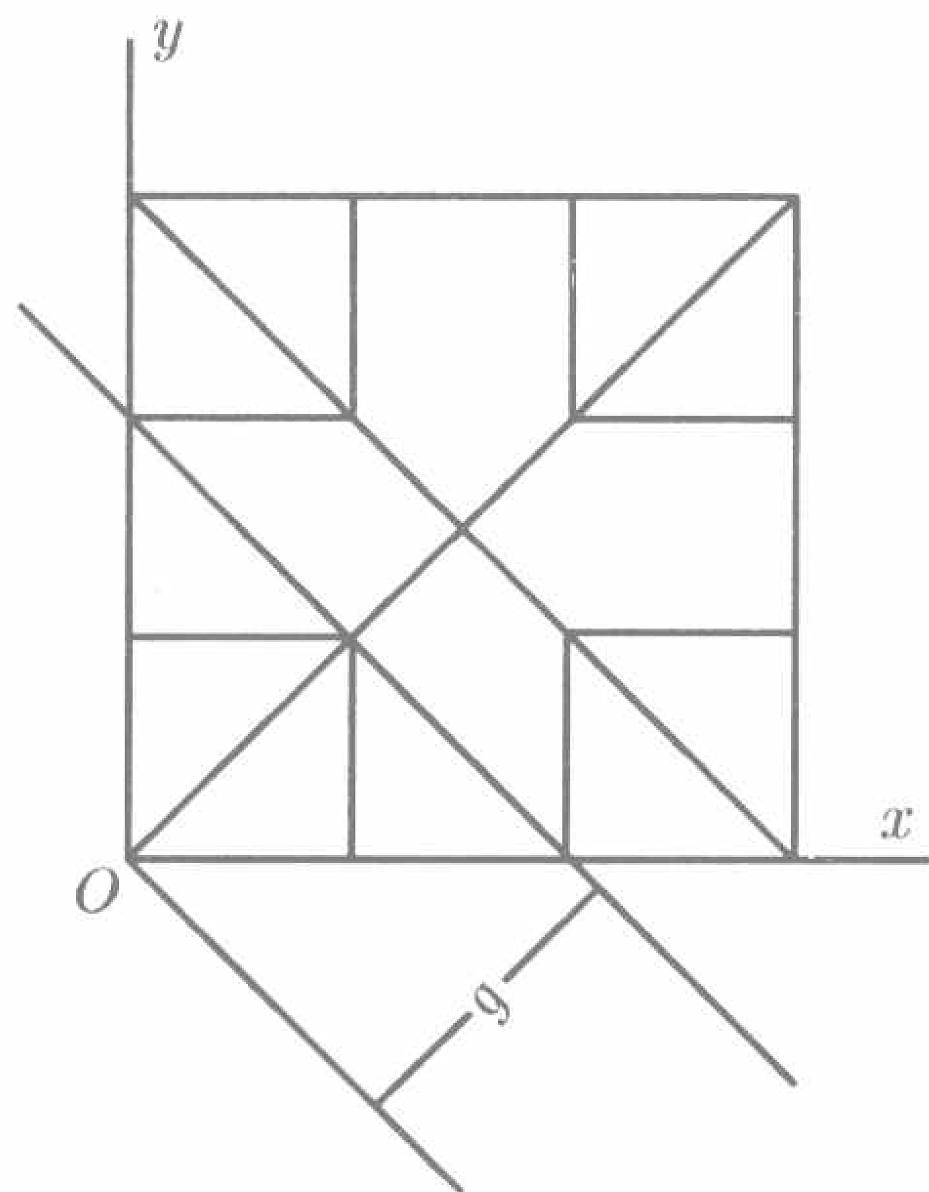


图 2.6.12　$C\times C$ 坐标系

μ 为 $C\times C$ 上的一个质量分布.

如图 2.6.12 建立直角坐标系, S_0 的主和斜对角线方程分别为

$$y=x,\quad y+x=1.$$

$C\times C$ 与 $[0,1]$ 区间的交是三分 Cantor 集. $S_n\cap[0,1]$ 由 2^n 个长为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间组成, 每个这样的闭区间称为基本区间, 记为 I_n. 在 $S_n\cap[0,1]$ 上定义分布函数 μ_1, 满足

$$\begin{cases}\mu_1([0,1])=1,\\ \mu_1(I_n)=\dfrac{1}{2^n}, \quad n=1,2,3,\cdots,\\ \mu_1([0,1]-C)=0,\end{cases}$$

则 μ_1 为 $[0,1]$ 上的一个测度且 μ_1 为 C 上的一个质量分布. $\mu_1([0,x])$ 就是著名的 Cantor 函数, 它在 $[0,1]$ 上单调增加且连续.

引理 2.6.17 对任意 $x \in (0,1]$, 则 $\mu_1([0,x]) \geqslant \dfrac{2}{2^s}x^s$, 其中 $s = \log_3 4$.

证明 根据 $\mu[0,x]$ 与 $\dfrac{2}{2^s}x^s$ 的连续性, 只需对 x 取 $I_n(n>0)$ 的端点的值证明即可. 容易知道, $\dfrac{\mu_1([0,x])}{x^s}$ 只可能在基本区间 $I_n\left(I_n \neq \left[0,\dfrac{1}{3^n}\right]\right)$ 的左端点 x_n 取得最小值. 下面用数学归纳法证明: 当 $n=1$ 时

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad \frac{\mu_1((0,x_1])}{x_1^s} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^s} = \frac{2}{2^s}.$$

假设当 $n=k$ 时, 引理成立, 即对基本区间 $I_k\left(I_k \neq \left[0,\dfrac{1}{3^k}\right]\right)$ 的左端点 x_k, 都有

$$\mu_1([0,x_k]) \geqslant \frac{2}{2^s}x_k.$$

当 $n=k+1$ 时,

(i) 若 $I_{k+1} = \left[\dfrac{2}{3^{k+1}},\dfrac{1}{3^k}\right]$, 即 $x_{k+1} = \dfrac{2}{3^{k+1}}$, 则

$$\frac{\mu_1([0,x_{k+1}])}{x_{k+1}^s} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\left(\frac{2}{3^{k+1}}\right)^s} = \frac{2^{k+1}}{2^s} \geqslant \frac{2}{2^s}.$$

(ii) 若 $x_{k+1} = x_k$, 则由归纳假设知, 引理成立.

(iii) 若 $x_{k+1} = x_k + \dfrac{2}{3^{k+1}}$, 则

$$\mu_1([0,x_{k+1}]) = \mu_1([0,x_k]) + \frac{1}{2^{k+1}},$$

故

$$\begin{aligned}\mu_1([0,x_{k+1}]) - \frac{2}{2^s}\cdot x_{k+1}^s &= \mu_1([0,x_k]) + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{2}{2^s}\cdot x_{k+1}^s \\ &\geqslant \frac{2}{2^s}\cdot x_k^s + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{2}{2^s}\left(x^k + \frac{2}{3^{k+1}}\right)^s.\end{aligned}$$

令

$$f(x) = \frac{2}{2^s}\cdot x^s + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{2}{2^s}\left(x + \frac{2}{3^{k+1}}\right)^s,$$

则当 $x \in [0,1]$ 时, $f'(x) \leqslant 0$. 从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的. 注意到 $x_k \leqslant 1 - \dfrac{1}{3^k}$, 由上式和 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in \left[1-\dfrac{1}{3^k}, 1-\dfrac{1}{3^{k+1}}\right]$, 使得

$$\mu_1([0,x_{k+1}]) - \frac{2}{2^s}\cdot x_{k+1}^s \geqslant \frac{2}{2^s}\cdot\left(1-\frac{1}{3^k}\right)^s + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{2}{2^s}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)^s$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{2}{2^s}s\xi^{s-1}\frac{2}{3^{k+1}} \geqslant \frac{1}{2^{k+1}}\left[1-\frac{4s}{2^s}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right]$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{k+1}}\left[1-\frac{4s}{2^s}\cdot\frac{4}{9}\right] > 0.$$

所以当 $n=k+1$ 时, 引理成立. □

推论 2.6.18　对任意 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$, 有 $\mu_1([0,x])\geqslant\frac{4}{2^s}x^s$.

证明　完全类似于上面引理的证明, 从略. □

设 G 为平行于 E_0 的斜对角线且与 E_0 相交的直线, 记原点到 G 的距离 $d((0,0),G)=g\geqslant 0$, 记 G 与 x 轴和 y 轴围成的三角形为 $\triangle_g$(见图 2.6.12).

引理 2.6.19　$\mu(\triangle_g)\geqslant 0.9836g^s$, $0\leqslant g\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}$.

证明　对 $0<g\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}$, 存在自然数 k, 使得 $\frac{\sqrt{2}}{3^{k+1}}<g\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3^k}$, 从而有 $\frac{\sqrt{2}}{3}<3^kg\leqslant\sqrt{2}$. 容易看出, $\mu(3^k\triangle_g)=4^k\mu(\triangle_g)$, 并且

$$\frac{\mu(\triangle_{3^k\cdot g})}{(3^k\cdot g)^s}=\frac{4^k\mu(\triangle_g)}{4^k\cdot g^s}=\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}.$$

因此只需证明, 当 $\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}$ 时引理是正确的即可.

任取自然数 n, 将 A_1B 分成 $2\cdot 3^n$ 等份, 分点记为 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, $A_{2\cdot 3^n}$, $A_{2\cdot 3^n+1}=B$(见图 2.6.13).

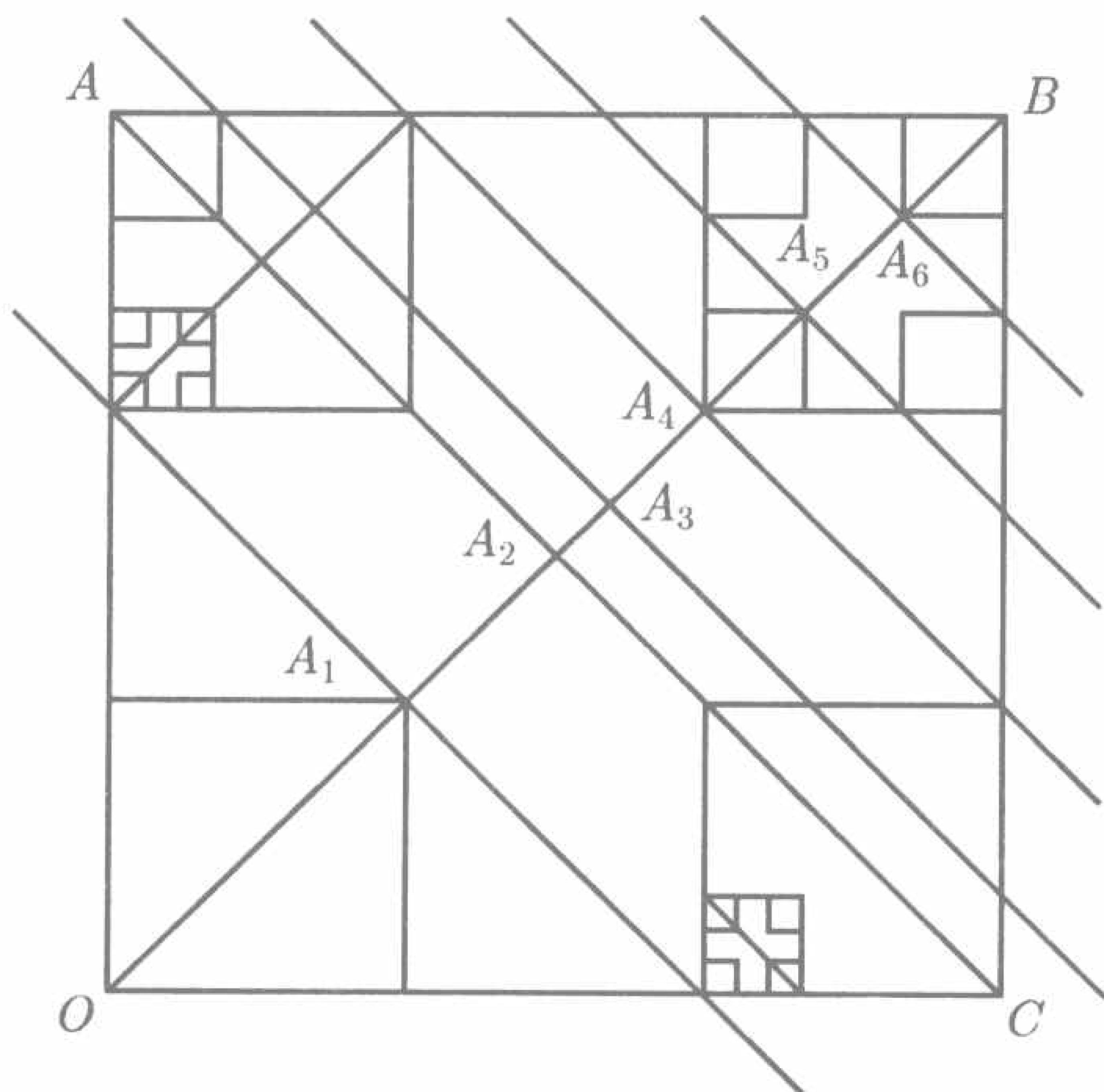


图 2.6.13　$C\times C$ 细图

易知

$$|A_iA_{i+1}| = \frac{1}{2\cdot 3^n}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}, \quad n=1,2,\cdots,2\cdot 3^n.$$

记

$$g_{i,n} = |OA_i| = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{(i-1)\sqrt{2}}{3^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{i-1}{3^n}\right), \quad n=1,2,\cdots,2\cdot 3^n.$$

由于 $\frac{\sqrt{2}}{3} < g \leqslant \sqrt{2}$, 故存在 $i\in\{1,2,\cdots,2\cdot 3^n\}$, 使得 $g_{i,n} < g \leqslant g_{i+1,n}$. 从而

$$g^s \leqslant g_{i+1,n}^s = \frac{\sqrt{2}^s}{3^s}\left(1+\frac{i}{3^n}\right)^s = \frac{\sqrt{2}^s}{4}\left(1+\frac{i}{3^n}\right)^s,$$

$$\mu(\triangle_g) \geqslant \frac{\sqrt{2}^s}{4} + \frac{l_n^i\sqrt{2}^s}{4^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}^s}{4}\left(1+\frac{l_n^i}{4^n}\right) \geqslant \left(\frac{3^n}{3^n+i}\right)^s\left(1+\frac{l_n^i}{4^n}\right)g^s.$$

其中 l_n^i 表示在直线 G_i 和 D_1D_2 之间所包含的 $\frac{1}{3^{n+1}}$ 基本正方形 $\square_{n+1}$ 的个数, G_i 平行于 D_1D_2 且过等分点 A_i. 如图 2.6.13 中,

$$n=1;\quad l_1^1=0;\quad l_1^2=2;\quad l_1^3=6;\quad l_1^4=8;\quad l_1^5=9;\quad l_1^6=11.$$

记

$$h(n,i) = \left(\frac{3^n}{3^n+i}\right)^s\left(1+\frac{l_n^i}{4^n}\right) = \frac{4^n+l_n^i}{(3^n+i)^s}.$$

则

$$\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s} \geqslant h(n,i), \quad g_{i,n} < g \leqslant g_{i+1,n}, \quad i=1,2,\cdots,2\cdot 3^n.$$

从而对任给的自然数 n, 有

$$\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}} \frac{\mu(\triangle_g)}{g^s} \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}.$$

当 $n=1$ 时, 容易算出

$$h(1,1)=\frac{4}{4^s}\geqslant 0.69557597,\quad h(1,2)=\frac{6}{5^s}\geqslant 0.78731578,$$
$$h(1,3)=\frac{10}{6^s}\geqslant 1.04251440,\quad h(1,4)=\frac{12}{7^s}\geqslant 1.02987812,$$
$$h(1,5)=\frac{13}{8^s}\geqslant 0.94269286,\quad h(1,6)=\frac{15}{9^s}\geqslant 0.9375.$$

因此

$$\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}} \frac{\mu(\triangle_g)}{g^s} \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\} = \frac{4}{4^s} \geqslant 0.69557597.$$

同理可得

当 $n=2$ 时, $\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}}\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}=\left(\frac{9}{11}\right)^s\cdot\frac{9}{8}\geqslant 0.87333576$;

当 $n=3$ 时, $\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}}\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}=\left(\frac{27}{31}\right)^s\cdot\frac{9}{8}\geqslant 0.94233021$;

当 $n=4$ 时, $\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}}\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}=\left(\frac{81}{91}\right)^s\cdot\frac{288}{256}\geqslant$ 0.97039446.

容易证明: 当 n 增加时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}$ 随之增大. 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}$ 存在. 为得到函数 $\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2}\right]$ 上更好的下界, 需对更大的 n 计算 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}$.

将 A_iA_{I+1} 分成 3 等份. 容易得到下面的递推公式:

$$l_{n+1}^{3i+1}=3l_n^i+l_n^{i+1},\quad l_{n+1}^{3i+2}=l_n^i+3l_n^{i+1},\quad i=1,2,\cdots,2\cdot 3^n;n=1,2,\cdots.$$

借助于上面的递推公式和简单的数值计算, 得

当 $n=5$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^5}\{h(5,i)\}\approx 0.97891182$;

当 $n=6$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^6}\{h(6,i)\}\approx 0.98216360$;

当 $n=7$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^7}\{h(7,i)\}\approx 0.98317099$;

当 $n=8$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^8}\{h(8,i)\}\approx 0.98351435$;

当 $n=9$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^9}\{h(9,i)\}\approx 0.98362401$;

当 $n=10$ 时, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^{10}}\{h(10,i)\}\approx 0.98365950$.

....

上面的所有数都精确到八位小数. 从而有

$$\inf_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}}\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}\geqslant\lim_{n\to\infty}\min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^n}\{h(n,i)\}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 2\cdot 3^{10}}\{h(10,i)\}>0.9836.\qquad\square$$

注 2.6.20　易知, 当 $g=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{1}{9}\right)$ 时, $\mu(\triangle_g)=\frac{\sqrt{2^s}}{4}\left(1+\frac{1}{8}\right)$ 且

$$\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}=\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^s\approx 0.984947.$$

这说明引理 2.6.19 中的常数 0.9836 与 $\inf\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}<g\leqslant\sqrt{2}}\frac{\mu(\triangle_g)}{g^s}$ 是比较接近的.

引理 2.6.21 对任何可测集合 V, 有 $\mu(V) \leqslant 1.044|V|^s$.

证明 不妨设 $V \subset S_0$, 否则用 $V \cap S_0$ 代替.

(1) 若 V 与 S_1 中 4 个 1 拷贝相交, 作平行于主对角线和斜对角线的直线 G_1, G_2, G_3, G_4 使 $V \subset \square_V$, 且 V 与 $\square_V$ 的四边均相交 (见图 2.6.14), 其中 $\square_V$ 为由直线 G_1, G_2, G_3, G_4 围成的矩形.

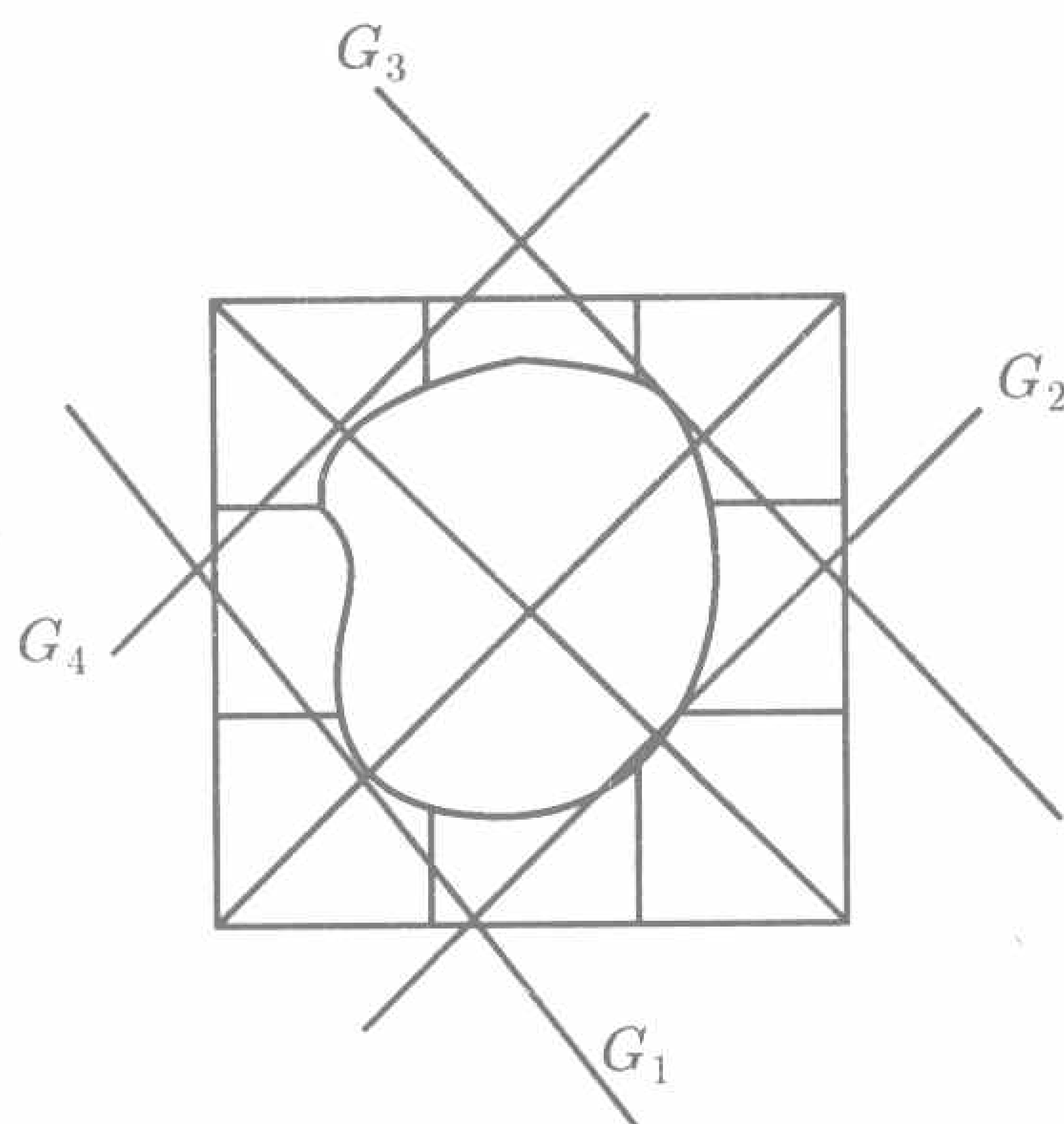


图 2.6.14 $C \times C$ 细图

记距离

$$d((0,0),G_1) = g_1, \quad d((1,0),G_2) = g_2,$$
$$d((1,1),G_3) = g_3, \quad d((0,1),G_4) = g_4,$$

则

$$|V| \geqslant \sqrt{2} - g_1 - g_3, \quad |V| \geqslant \sqrt{2} - g_2 - g_4, \quad |V| \geqslant \sqrt{2} - \frac{1}{2}(g_1 - g_2 - g_3 - g_4),$$

因此

$$1.044|V|^s \geqslant 1.044\sqrt{2^s}\left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)\right\}^s.$$

由引理 2.6.19 得

$$\mu(V) \leqslant \sum_{k=1}^{4}\left\{\frac{\sqrt{2^s}}{4} - \mu(\triangle_{gk})\right\} = \sqrt{2^s} - \sum_{k=1}^{4}\mu(\triangle_{g_k})$$
$$\leqslant \sqrt{2^s} - 0.9836(g_1^s + g_2^s + g_3^s + g_4^s).$$

令

$$f(g_1,g_2,g_3,g_4)=1.044\sqrt{2^s}\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{4}(g_1+g_2+g_3+g_4)\right\}^s+0.9836(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s)-\sqrt{2^s},$$

其中 $0 \leqslant g_i \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{3}(i = 1,2,3,4)$. 对 $f(g_1,g_2,g_3,g_4)$ 求偏导数, 并令

$$f'_{g_1} = 0; \quad f'_{g_2} = 0; \quad f'_{g_3} = 0; \quad f'_{g_4} = 0,$$

得到 $f(g_1,g_2,g_3,g_4)$ 的稳定点 $(g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0)$, 其中

$$g_1^0 = g_2^0 = g_3^0 = g_4^0 = \left\{\sqrt{2} + \left(\frac{3.9344}{1.044\sqrt{2^s}\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right\}^{-1} \approx 0.10681788.$$

令 $D_1=\left\{(g_1,g_2,g_3,g_4)|0\leqslant g_1+g_2+g_3+g_4\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{2}\right\}$. 下面证明 $f(g_1,g_2,g_3,g_4)$ 闭区域 D_1 上的最小值大于零. 由于

$$f(g_1^0,g_2^0,g_3^0,g_4^0)\geqslant 1.31486140+0.23397162-1.54856292=0.0002701>0$$

在 D_1 的边界上, 当 $g_1+g_2+g_3+g_4=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 时, 由命题 2.6.16 得到

$$\begin{aligned}&f(g_1,g_2,g_3,g_4)\\=&1.044\sqrt{2^s}\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{4}(g_1+g_2+g_3+g_4)\right\}^s+0.9836(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s)-\sqrt{2^s}\\\geqslant&\frac{1.044}{4}\sqrt{2^s}+0.9836\times 4\left(\frac{g_1+g_2+g_3+g_4}{4}\right)^s-\sqrt{2^s}\\=&\left(\frac{1.044}{4}+0.9836-1\right)\sqrt{2^s}>0.\end{aligned}$$

当 $g_1+g_2+g_3+g_4=0$ 时, $g_1=g_2=g_3=g_4=0$. 故

$$f(0,0,0,0)=(1.044-1)\sqrt{2^s}>0.$$

因此

$$1.044|V|^s-\mu(V)\geqslant f(g_1,g_2,g_3,g_4)>0$$

(2) 若 V 与 S_1 中 3 个 1 拷贝相交, 而与另一个不相交, 不妨设 V 与位于左上角的 1 拷贝不相交 (见图 2.6.14), 则

$$|V|\geqslant\sqrt{2}-g_1-g_3,\quad 1.044|V|^s\geqslant 1.044[\sqrt{2}-g_1-g_3]^s.$$

由引理 2.6.19 得

$$\begin{aligned}\mu(V)&\leqslant 3\cdot\frac{\sqrt{2^s}}{4}-[\mu(\triangle_{g_1})+\mu(\triangle_{g_2})+\mu(\triangle_{g_3})]\\&\leqslant 3\cdot\frac{\sqrt{2^s}}{4}-0.9836(g_1^s+g_2^s+g_3^s).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&1.044|V|^s-\mu(V)\\\geqslant&1.044[\sqrt{2}-g_1-g_3]^s+0.9836(g_1^s+g_3^s)+0.9836g_2^s-3\cdot\frac{\sqrt{2^s}}{4}.\end{aligned}$$

令

$$f(g_1,g_3)=1.044[\sqrt{2}-(g_1+g_3)]^s+0.9836(g_1^s+g_3^s)-3\cdot\frac{\sqrt{2^s}}{4},$$

其中

$$0 \leqslant g_i \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad i=1,3.$$

对 $f(g_1,g_3)$ 求偏导数并令 $f'_{g_1}=0$, $f'_{g_3}=0$, 可以得到 $f(g_1,g_3)$ 的稳定点 (g_1^0,g_3^0), 其中

$$g_1^0=g_3^0=\sqrt{2}\left[2+\left(\frac{0.9836}{1.044}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right]^{-1}\approx 0.50571669.$$

令 $D_2=\left\{(g_1,g_3)|0\leqslant g_1+g_3\leqslant \frac{2}{3}\sqrt{2}\right\}$. 下面证明 $f(g_1,g_3)$ 在闭区域 D_2 上的最小值大于零. 因为 $(g_1^0,g_3^0)\notin D_2$, 所以在 D_2 上的最小值点应位于 D_2 的边界上. 类似于情形 (1) 的讨论, 由命题 2.1.32 容易证明, 在 D_2 的边界上, $f(g_1,g_3)$ 大于零. 故

$$1.044|V|^s-\mu(V)\geqslant f(g_1,g_3)>0.$$

(3) 若 V 与 S_1 中 2 个 1 拷贝 $\square_1$ 和 $\square_1'$ 相交. 当 $\square_1$ 和 $\square_1'$ 位于对角线上, 不妨设在主对角线上 (见图 2.6.14), 则类似情形 (2), 有 $1.044|V|^s-\mu(V)\geqslant f(g_1,g_3)>0$.

当 $\square_1$ 和 $\square_1'$ 位于 E_0 中同一条边上, 如图 2.6.15 所示, 记

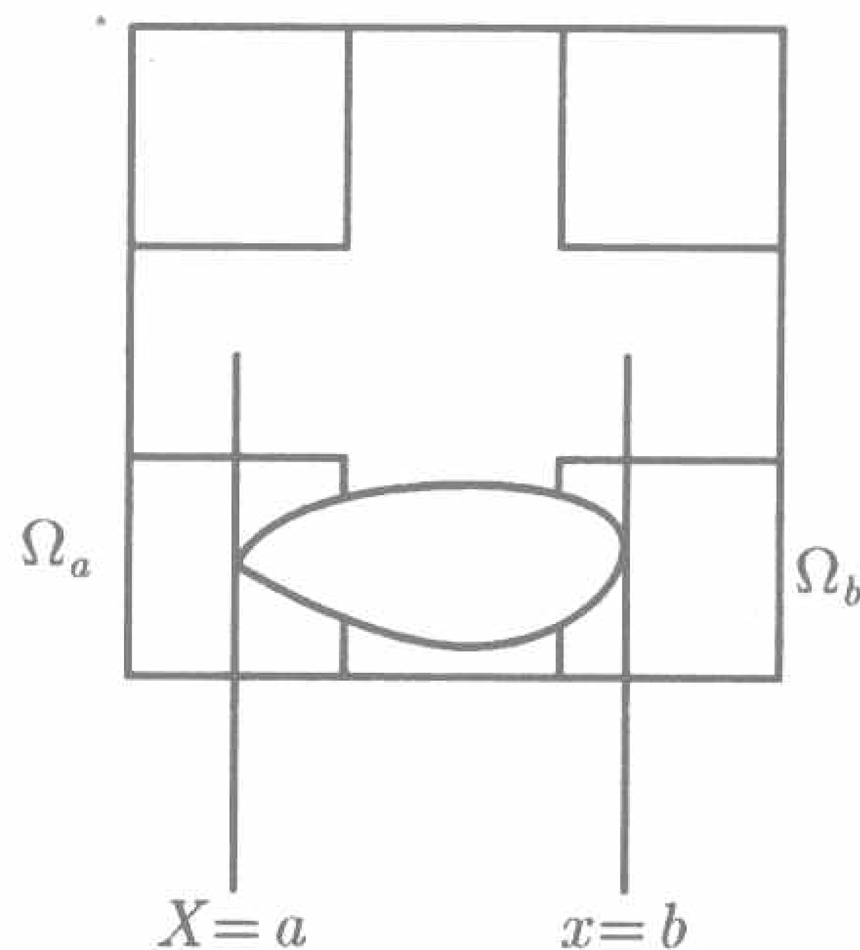


图 2.6.15 $C\times C$ 坐标系

$$\begin{aligned}
a&=\min\{x:(x,y)\in V\cap(\square_1\cup\square_1')\},\\
b&=1-\max\{x:(x,y)\in V\cap(\square_1\cup\square_1')\},\\
\square_a&=\{(x,y)|x\leqslant a,(x,y)\in\square_1\},\\
\square_b&=\{(x,y)|x\geqslant b,(x,y)\in\square_1'\}.
\end{aligned}$$

则 $|V|\geqslant 1-a-b$, $1.044|V|^s\geqslant[1-a-b]^s$. 由推论 2.6.18 和 $0\leqslant a,b\leqslant\frac{1}{3}$, 得到

$$\mu(\Omega_a)\geqslant\frac{\frac{2\sqrt{2^s}}{16}}{\left(\frac{2}{9}\right)^s}a^s=\frac{2}{\sqrt{2^s}}a^s,\quad \mu(\Omega_b)\geqslant\frac{2}{\sqrt{2^s}}b^s.$$

因此

$$\mu(V)\leqslant 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}-[\mu(\Omega_a)+\mu(\Omega_b)]\leqslant\frac{\sqrt{2^s}}{2}-\frac{2}{\sqrt{2^s}}(a^s+b^s),$$

故

$$1.044|V|^s-\mu(V)\geqslant 1.044[1-a-b]^s+\frac{2}{\sqrt{2^s}}(a^s+b^s)-\frac{\sqrt{2^s}}{2}.$$

令

$$f(a,b)=1.044[1-a-b]^s+\frac{2}{\sqrt{2^s}}(a^s+b^s)-\frac{\sqrt{2^s}}{2}.$$

对 $f(a,b)$ 求偏导数, 并令 $f_a'=0$, $f_b'=0$, 可以得到 $f(a,b)$ 的稳定点 (a^0,b^0), 其中

$$a^0=b^0=\left[2+\left(\frac{2}{1.044\sqrt{2^s}}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right]^{-1}\approx 0.23509874.$$

令 $D_3=\left\{(a,b)|0\leqslant a+b\leqslant\frac{2}{3}\right\}$. 类似于情形 (1) 的证明方法易证, $f(a,b)$ 闭区域 D_3 上的最小值大于零. 因此 $1.044|V|^s-\mu(V)\geqslant f(a,b)>0$.

(4) 若 V 与 S_1 中 1 个基本正方形 $\square_1$ 相交, 则 $\mu(V)=\mu(V\cap\square_1)$. 若 $V\cap\square_1$ 仅与 S_2 中 1 个 2 拷贝 $\square_2$ 相交, 则 $\mu(V)=\mu(V\cap\square_2)$. 若 $V\cap\square_1$ 与 S_2 中 2 个、3 个、4 个 2 拷贝相交, 则由上面的情形 (1)~(3) 可得

$$\mu(V)=\mu(V\cap\square_1)\leqslant 1.044|V\cap\square_1|^s\leqslant 1.044|V|^s.$$

由数学归纳法, 或者 $\mu(V)\leqslant 1.044|V|^s$, 或者存在 $\square_n\subset S_n$, 使得

$$\mu(V)=\mu(V\cap\square_n)\leqslant\mu(\square_n)=\frac{\sqrt{2^s}}{4^n}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $\mu(V)=0\leqslant 1.044|V|^s$. □

定理 2.6.15 的证明 由质量分布原理 (见 1.2 节的 (8)) 和引理 2.6.21 得到

$$1.044\mathcal{H}^s(C\times C)\geqslant\mu(C\times C)=\sqrt{2^s}.$$

从而

$$\mathcal{H}^s(S)\geqslant\frac{\sqrt{2^s}}{1.044}\geqslant 1.48329.$$ □

下面估计 Koch 曲线 K 的 $\mathcal{H}$ 测度的下限.

定理 2.6.22 $\mathcal{H}^s(K)\geqslant\frac{1}{2}=0.5, s=\dim_{\mathcal{H}}(K)=\log 4/\log 3.$

我们先作一系列准备, 然后给出证明.

下述基本事实见定理 2.5.2 的证明 (亦参见例 1.1.3):

(1) 设 $n\geqslant 1$, 易见 K_n 由 4^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的线段 (n 基本线段) 构成. 每一个 n 基本线段记作 I_n. 在每一个 n 基本线段 I_n 上生成 Koch 曲线, 是一个与 K 相似的集合, 相似比为 $\frac{1}{3^n}$, 称作 $\frac{1}{3^n}$-Koch 曲线, 记作 $\frac{1}{3^n}$-K. 据缩放比例性质,

$$\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3^n}-K\right)=\frac{1}{4^n}\mathcal{H}^s(K).$$

(2) 设 $n \geqslant 1$, K 中夹角为 60° 的相邻两边构成一个正三角形, 记作 $\triangle_n$, 称作 K_n 的基本三角形 (或 K 的 n 拷贝), 记作 $\triangle_n$. 易于归纳算出, $\triangle_n$ 的外接圆的直径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}$. 再者, 易于看出, $\triangle_n$ 的 (实, 闭) 外接圆覆盖由组成 $\triangle_n$ 的 K_n 的 2 个 n 基本线段上生成的 $\frac{1}{3^n} - K$.

在 $\triangle OAB = \triangle_0$ 上定义质量分布 μ:

$$\begin{cases} \mu(\triangle_0) = 1, \\ \mu(\triangle_n) = \dfrac{1}{4^n}, \\ \mu(\triangle_0 - K) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{2.6.1}$$

建立直角坐标系 (见图 2.6.16). 原点 O 为基本线段 I_0 的端点, 且 I_0 与横坐标轴重合. 设 G 是与 BC 的平行线, E, F 分别是其与 OA, OB 的交点. 设 $|OE| = g$. 令 $\mu(g) = \mu(\triangle OEF \cap K), 0 < g \leqslant 1$.

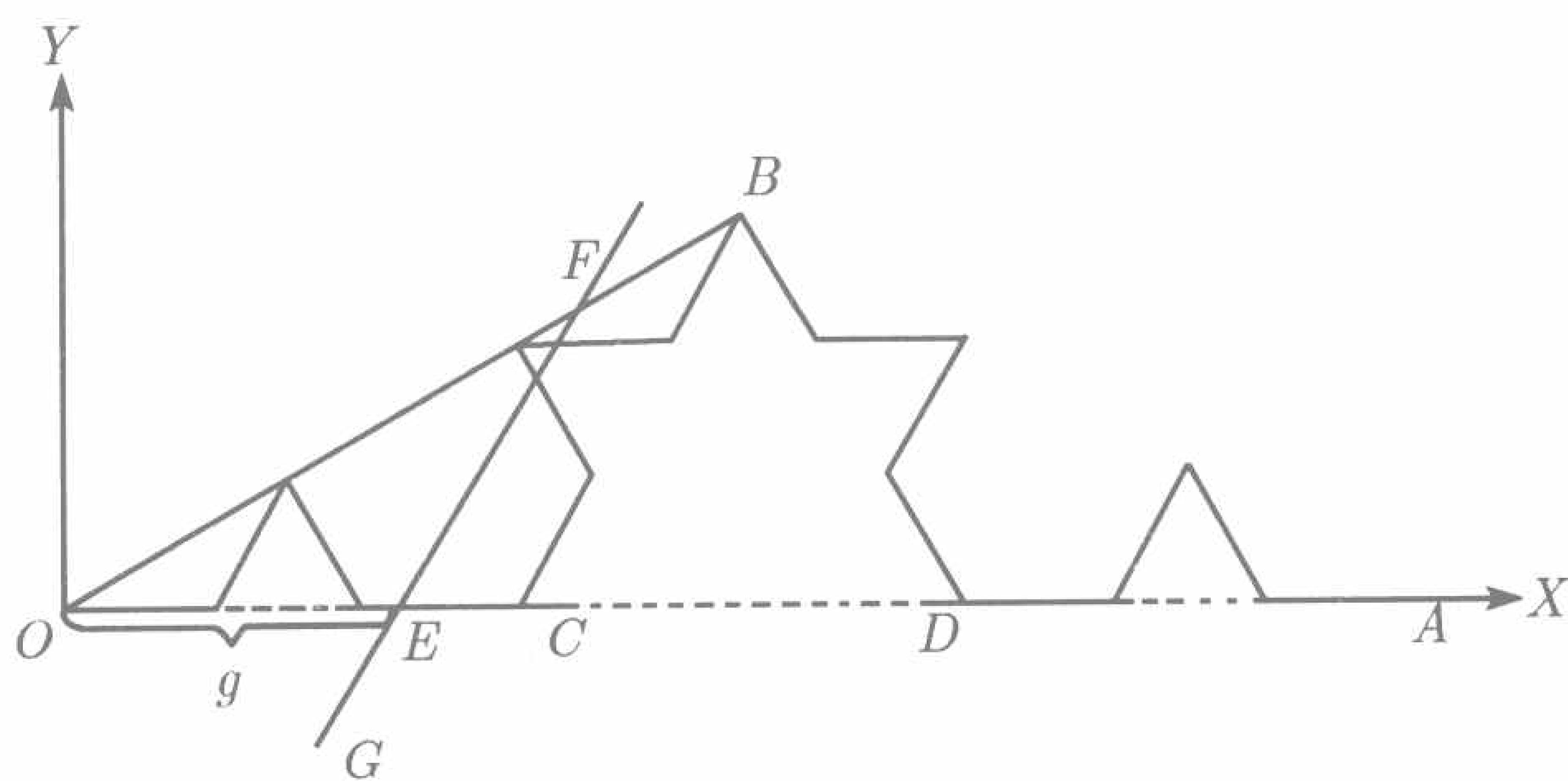


图 2.6.16 Koch 曲线

引理 2.6.23 (1) 若 $0 < g \leqslant 1$, 则 $\frac{\mu(g)}{g^s} \leqslant 2$;

(2) 若 $0 < g \leqslant 1/3$, 则 $\frac{\mu(g)}{g^s} > 1.145$.

证明 (1) 先考虑 $0 < g \leqslant 1/3$. 存在整数 $k \geqslant 1$ 使得 $\frac{1}{3^{k+1}} < g \leqslant \frac{1}{3^k}$, 那么 $\frac{1}{9} < 3^{k-1}g \leqslant \frac{1}{3}$, 且

$$\frac{\mu(3^{k-1}g)}{(3^{k-1}g)^s} = \frac{4^{k-1}\mu(g)}{4^{k-1}g^s} = \frac{\mu(g)}{g^s}.$$

这证明了当 $g \in \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right]$ 时 $\frac{\mu(g)}{g^s} \leqslant 2$. 把 $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right]$ 分成每份长度为 $\frac{1}{81}$ 的 18 等份:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{i}{81}, \frac{1}{9} + \frac{i+1}{81}\right], \quad i = 0, 1, \cdots, 17.$$

那么, 当 $g\in\left(\frac{1}{9}+\frac{i}{81},\frac{1}{9}+\frac{i+1}{81}\right]$ 时

$$\frac{\mu(g)}{g^s}\leqslant\frac{\mu\left(\frac{1}{9}+\frac{i+1}{81}\right)}{\left(\frac{1}{9}+\frac{i}{81}\right)^s}.$$

通过简单计算可知, 除了两种情形: $g\in\left(\frac{1}{9},\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\right]$; $g\in\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{81},\frac{1}{3}\right]$ 外, 当 g 属于其余的小区间时, 都有 $\frac{\mu(g)}{g^s}\leqslant 2$.

当 $g\in\left(\frac{1}{9},\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\right]$ 时, 存在 $k\geqslant 4$ 使得

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{3^{k+1}}<g\leqslant\frac{1}{9}+\frac{1}{3^k},$$

于是 $\mu(g)\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{4^k}$ 且

$$\frac{\mu(g)}{g^s}\leqslant\frac{1/8+1/4^k}{(1/9+1/3^{k+1})^s}=\frac{2\times 4^k+16}{(3^k+3)^s}.$$

设 $f(x)=\frac{2\times 4^x+16}{(3^x+3)^s}$, 有

$$f'(x)=\frac{2\ln4(3\times 4^x-8\times 3^x)}{(3^x+3)^{s+1}}.$$

通过简单分析可知, 当 $x\geqslant 4$ 时, $f(x)$ 是递升的. 于是

$$\frac{\mu(g)}{g^s}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{2\times 4^k+16}{(3^k+3)^s}=2,\quad k\geqslant 4.$$

对 $g\in\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{81},\frac{1}{3}\right]$, 因为当 $g=1/3^k(k\geqslant 1)$ 时, $\frac{\mu(g)}{g^s}=2$, 仅需考虑 $g\in(1/3-1/81,1/3)$. 存在整数 $k\geqslant 4$ 使得 $1/3-1/3^k<g<1/3-1/3^{k+1}$. 下面据 Koch 曲线的结构给出 $\mu(g)$ 的归纳的不等式, 其中 $1/3-1/3^k<g<1/3-1/3^{k+1}$.

情形 $k=1$ 对应 $0<g<1/3-1/9$, 那么

$$\frac{\mu(g)}{g^s}\leqslant 1/2-(1+2+2)/4^2.$$

情形 $k=2$ 对应 $1/3-1/3^2<g<1/3-1/3^3$, 那么

$$\mu(g)\leqslant 1/2-(1+2+4+4)/4^3.$$

归纳地, 当 $k \geqslant 1$ 时, 对应 $1/3 - 1/3^k < g < 1/3 - 1/3^{k+1}$, 有

$$\mu(g) \leqslant 1/2 - \frac{2^k + \sum_{i=0}^{k} 2^i}{4^{k+1}}.$$

那么

$$\frac{\mu(g)}{g^s} \leqslant \frac{1/2 - (3 \times 2^k - 1)/4^{k+1}}{(1/3 - 1/3^k)^s} = \frac{2 \times 4^k - 3 \times 2^k + 1}{(3^k - 3)^s}.$$

易见, 上式当 $k \geqslant 4$ 时是递升的, 故

$$\frac{\mu(g)}{g^s} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{2 \times 4^k - 3 \times 2^k + 1}{(3^k - 3)^s} = 2, \quad 0 < g \leqslant 1/3.$$

其次, 考虑当 $1/3 < g \leqslant 1$ 时的情形. 如果 $1/3 < g \leqslant 2/3$, 通过压缩比为 1/3 的压缩, 把 $(1/3, 2/3]$ 压缩成 $(1/9, 2/9]$, 据相似性, 即有 $\dfrac{\mu(g)}{g^s} \leqslant 2$. 当 $2/3 < g < 1$ 时, 把 $(2/3, 1]$ 分成几个相等部分, 通过简单计算表明, 当 g 属于每一部分时, 有 $\dfrac{\mu(g)}{g^s} \leqslant 2$.

(2) 对 $0 < g < 1/3$, 存在 $k \geqslant 1$, 使得 $1/3^{k+1} < g < 1/3^k$, 于是 $1/9 < 3^{k-1}g \leqslant 1/3$ 且 $\dfrac{\mu(3^{k-1}g)}{(3^{k-1}g)^s} = \dfrac{\mu(g)}{g^s}$. 这样, 也证明了 $g \in (1/9, 1/3]$ 的情形. 把 $(1/9, 1/3]$ 分成若干相等部分, 通过简单计算可知, 当 g 属于每一部分时, $\dfrac{\mu(g)}{g^s} > 1.145$. 于是完成引理的证明. □

注 2.6.24 对 $k > 1$, 用 I_k 代替 I_0, 上述引理亦成立.

坐标系与前相同, 直线 T 平行直线 BD(见图 2.6.17), M, N 分别是 T 与直线 OA, OB 的交点. 设 $|OM| = t$, 并令 $\mu(t) = \mu(\triangle OMN \cap K)$. 有

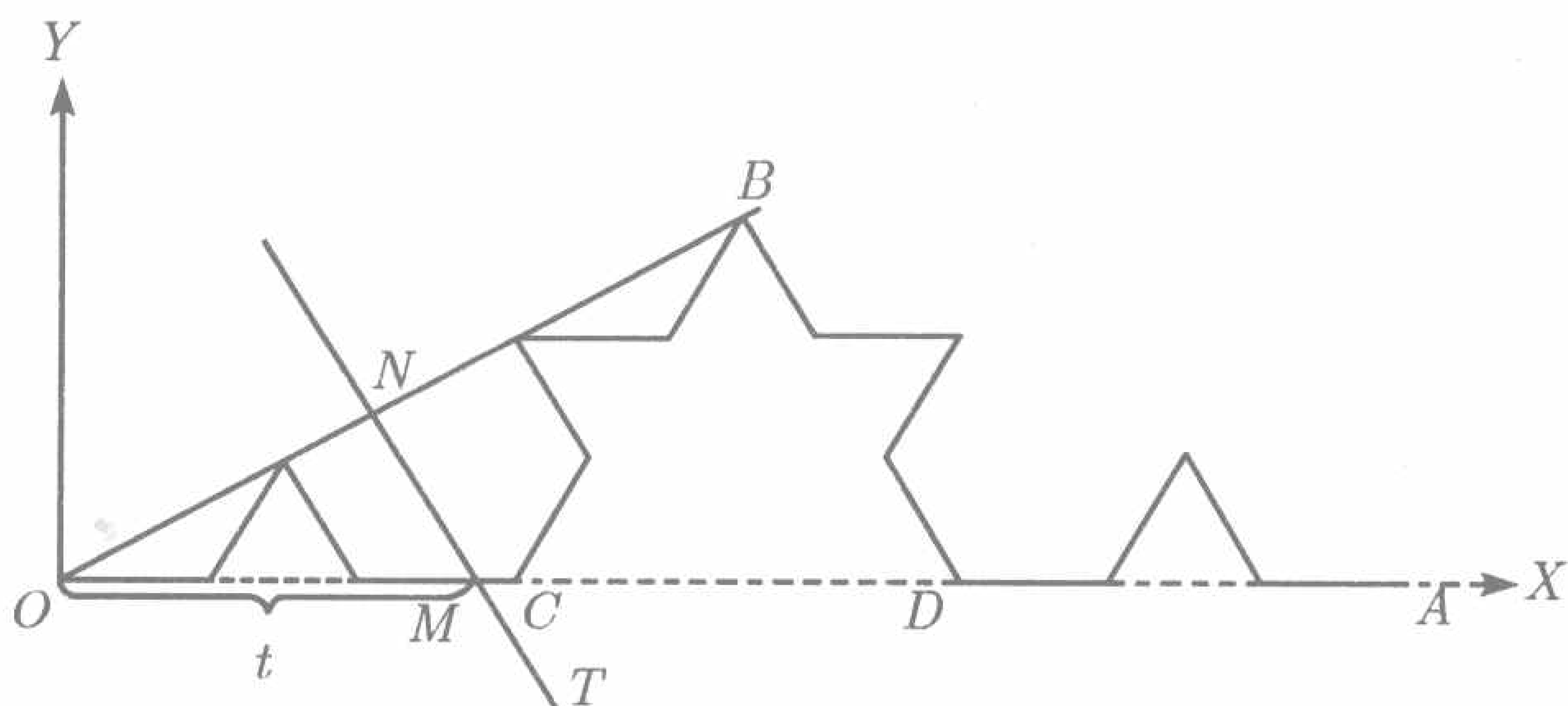


图 2.6.17 Koch 曲线

引理 2.6.25 若 $0 < t \leqslant 1$, 则 $\dfrac{\mu(t)}{t^s} \geqslant 2/2^s$.

证明　证明与上面引理的证明相似, 仅需考虑 $\frac{1}{3} < t \leqslant 1$ 的情形. 把 $(1/3, 1]$ 分成若干相等的部分. 一个简单计算表明, 除

$$t \in (2/3 - 1/27, 2/3]; \quad t \in (2/3, 2/3 + 1/27]$$

两种情形外, 都有 $\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant 2/2^s$. 下面讨论这两种情形.

当 $t \in [2/3 - 1/27, 2/3]$ 时, 注意到

$$\frac{\mu(t)}{t^s} = \frac{2/4^k}{(2/3^k)^s} = 2/2^s, \quad t = 2/3^k, \quad k \geqslant 1,$$

只要考虑 $t \in (2/3 - 1/27, 2/3)$ 就可以了. 存在整数 $k \geqslant 3$ 使得 $2/3 - 1/3^k < t < 2/3 - 1/3^{k+1}$, 于是 $\mu(t) \geqslant 1/2 - 1/4^k$ 和

$$\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \frac{1/2 - 1/4^k}{(2/3 - 1/3^{k+1})^s} = \frac{2 \times 4^k - 4}{(2 \times 3^{k-1})^s}.$$

借助与前面引理相同的讨论可知, 上面不等式的右端在 $k \geqslant 5$ 时是递减的, 于是

$$\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \lim_{k \to \infty} \frac{2 \times 4^k - 4}{(2 \times 3^k - 1)^s} = 2/2^s, \quad k \geqslant 5.$$

余下的是 $k = 3, k = 4$ 两种情形.

$k = 3$ 对应 $2/3 - 1/27 < t \leqslant 2/3 - 1/3^4$. 把 $(2/3 - 1/27, 2/3 - 1/3^4]$ 分成两等份. 估计当 t 属于每一等份时 $\frac{\mu(t)}{t^s} > \frac{2}{2^s}$.

当 $t \in (2/3 - 1/27, 2/3 - 1/27 + 1/81]$ 时, 有 $\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \frac{1/2 - 1/64}{(52/81)^s} \approx 0.8473 > 2/2^s$;

当 $t \in (2/3 - 1/27 + 1/81, 2/3 - 1/3^4]$ 时, 有 $\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \frac{1/2 - 2/256}{(53/81)^s} \approx 0.8406 > 2/2^s$.

$k = 4$ 对应 $2/3 - 1/3^4 < t \leqslant 2/3 - 1/3^5$. 类似讨论有 $\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant 2/2^s$.

当 $2/3 < t \leqslant 2/3 + 1/27$ 时, 存在整数 $k \geqslant 3$ 使得 $2/3 + 1/3^{k+1} < t \leqslant 2/3 + 1/3^k$, 分析与上面引理相同. 据 Koch 曲线的结构, 有

$$\mu(t) \geqslant 1/2 + \frac{2^k + \sum_{i=0}^{k} 2^i}{4^{k+1}} = 1/2 + \frac{2^k + 2^{k+1} - 1}{4^{k+1}}.$$

于是

$$\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \frac{1/2 + (3 \times 2^k - 1)/4^{k+1}}{(2/3 + 1/3^k)^s} = \frac{2 \times 4^k + 3 \times 2^k - 1}{(2 \times 3^k + 3)^s}.$$

容易看出, 上面两不等式的右端, 当 $k>2$ 都是递减的. 于是

$$\frac{\mu(t)}{t^s} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{2\times 4^k+3\times 2^k-1}{(2\times 3^k+3)^s}=2/2^s. \qquad \square$$

注 2.6.26 对 $k>0$, 用 I_k 代替 I_0, 上面引理照样成立.

为了证明本节定理, 要考虑 Koch 曲线 K 的特殊结构. 设 $L_k, M_k, N_k (k\geqslant 1)$ 表示三种结构 (见图 2.6.18), 其中 L_k 由两个 $\frac{1}{3^k}-K$ 构成; M_k 由两个 $\frac{1}{3^k}-K$ 构成; N_k 由四个 $\frac{1}{3^k}-K$ 构成. 对任意 $k>0$, 易见在结构 L_k 中存在结构 N_{k+1}, 在结构 N_k 中存在 L_k 结构. 借助下面三个引理, 将考虑 $\mu(V), |V|$ 之间的关系, 其中 V 分别与 L_k, M_k, N_k 相交.

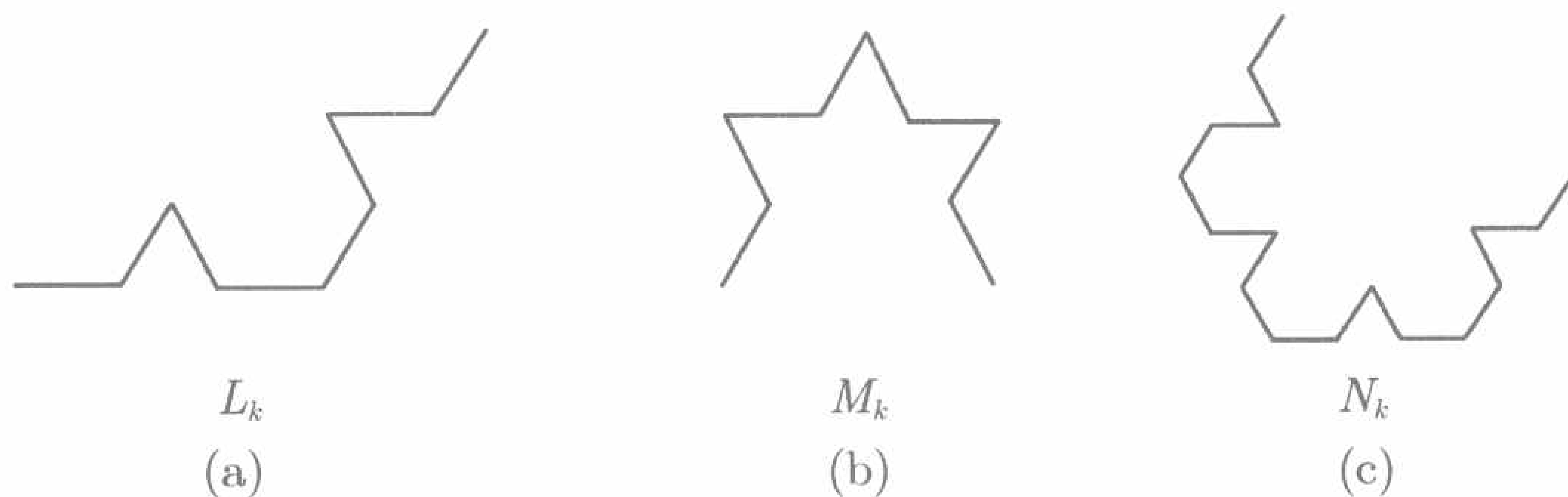


图 2.6.18 Koch 曲线

引理 2.6.27 对任意与结构 $L_k(k>0)$ 相交的可测集 V, 除了下述两种情形:

(1) V 与包含在 L_k 内的 N_{k+1} 相交;

(2) V 与包含在 L_k 内的 $\frac{1}{3^k}-K$ 相交.

有 $\mu(V)\leqslant 2|V^s|$.

证明 易见对任意 $k\neq k'$, $L_k; L'_k$ 相似. 所以只需考虑 L_1. 设 $V\subset \triangle OBC$(见图 2.6.19), 否则, 用 $V\cap\triangle OBC$ 代替 V. 设 $\triangle_{OM}; \triangle_{MC}; \triangle_{CP}; \triangle_{PB}$ 分别表示底边为 $OM; MC; CP; PB$ 的等腰三角形, 且设

$$L_1^1 = K\cap\triangle_{OM}; \quad L_1^2 = K\cap\triangle_{MC}; \quad L_1^3 = \triangle_{CP}; \quad L_1^4 = K\cap\triangle_{PB}.$$

考虑下述四种情形:

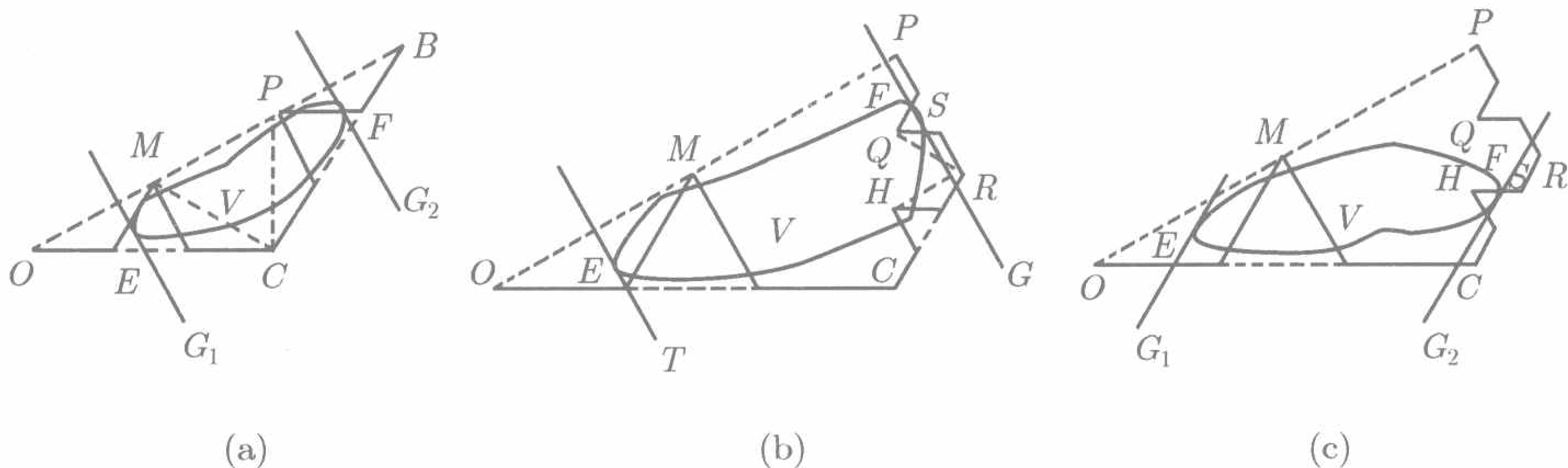


图 2.6.19 Koch 曲线

情形 1. 设 V 与 $L_1^1, L_1^2, L_1^3, L_1^4$ 相交. 直线 G_1, G_2 彼此平行, 且它们均与 V 相切 (见图 2.6.19 (a)), 这里 G_1 与 L_1^1 相交, G_2 与 L_1^4 相交. E, F 分别是 G_1 与 OC, G_2 与 BC 的交点. 设 $|OE| = t_1, |BF| = t_2$. 于是 $|V| \geqslant \sqrt{3}/3 - \sqrt{3}\times t_1/2 - \sqrt{3}\times t_2/2$. 另一方面, 据引理 2.6.25,

$$\mu(V) \leqslant 1/2 - \mu(t_1) - \mu(t_2) \leqslant 1/2 - 2t_1^s/2^s - 2t_2^s/2^s,$$

于是

$$2|V|^s - \mu(V) \geqslant 2[\sqrt{3}/3 - \sqrt{3}(t_1 + t_2)/2]^s + 2(t_1^s + t_2^s)/2^s - 1/2.$$

设

$$f(t_1, t_2) = 2[\sqrt{3}/3 - \sqrt{3}(t_1 + t_2)/2]^s + 2(t_1^s + t_2^s)/2^s - 1/2.$$

在区域

$$D = \{(t_1, t_2) \in R^2 : 0 \leqslant t_i \leqslant 2/9, i = 1, 2\}$$

上讨论函数 $f(t_1, t_2)$. 对 $f(t_1, t_2)$ 作关于 t_1 的偏导数, 由于 $f(x) = x^{s-1}$ 递增, 有

$$\begin{aligned} f'_{t_1} &= s[2t_1^{s-1}/2^s - \sqrt{3}(\sqrt{3}/3 - \sqrt{3}t_1/2 - \sqrt{3}t_2/2)^{s-1}] \\ &\leqslant s[2t_1^{s-1}/2^s - \sqrt{3}(2\sqrt{3}/9 - \sqrt{3}t_1/2)^{s-1}] \\ &\leqslant s[2(2/9)^{s-1}/2^s - \sqrt{3}(2\sqrt{3}/9 - \sqrt{3}(2/9)/2)^{s-1}] < 0. \end{aligned}$$

$f(t_1, t_2) \geqslant f(2/9, 2/9) = 0$, 于是 $f(t_1, t_2)$ 关于 t_1 在区域 D 是递降的. 类似地, $f(t_1, t_2)$ 关于 t_2 在 D 是亦是递降的. 于是 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$.

情形 2. 设 V 与 $L_1^1, L_1^2, L_1^3, L_1^4$ 相交. 如果 V 与 L_1^1, L_1^3, L_1^4 相交或与 L_1^1, L_1^2, L_1^4, 据情形 1 中的讨论可知 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$. 如果 V 与 L_1^1, L_1^2, L_1^3 或者与 L_1^2, L_1^3, L_1^4 相交, 那么仅需考虑其与 L_1^1, L_1^2, L_1^3 相交的情形. 注意, L_1^3 由分别包含在 $\triangle PRQ, \triangle CRH$ 内的两个 $\dfrac{1}{9}$-K 构成 (见图 2.6.19(b)). 分下述两步考虑这种情形:

(1) V 与包含在 $\triangle PRQ$ 内的 $\dfrac{1}{9}$-K 相交. 在图 2.6.19(b) 中, G, T 是 V 的切线, 且 G, T 平行于直线 PR. T 与 L_1^1 相交, G 与包含在 $\triangle PRQ$ 的 $\dfrac{1}{9}$-K 相交. E, F 分别是 T 与 OC, G 与 QS 的交点. 设 $|OE| = t, |QF| = g$. 于是

$$|V| \geqslant 11\sqrt{3}/54 - \sqrt{3}t/2 + \sqrt{3}g/2.$$

另一方面, 据引理 2.6.23 和引理 2.6.25,

$$\mu(V) \leqslant 5/16 - \mu(t) + 2\mu(g) \leqslant 5/16 - 2t^s/2^s + 4g^s.$$

于是

$$2|V|^s-\mu(V)\geqslant 2[11\sqrt{3}/54-\sqrt{3}t/2+\sqrt{3}g/2]^s+2t^s/2^s-4g^s-5/16.$$

设

$$f(t,g)=2[11\sqrt{3}/54-\sqrt{3}t/2+\sqrt{3}g/2]^s+2t^s/2^s-4g^s-5/16.$$

易见, f 在区域

$$D=\{(t,g)\in R^2:0\leqslant t\leqslant 2/9,0\leqslant g\leqslant 1/27|\}$$

上连续. 对 t 求偏导数, 据函数 $f(x)=x^{s-1}$ 的递增性, 有

$$\begin{aligned}f'_t&=s[2t^{s-1}/2^s-\sqrt{3}(11\sqrt{3}/54-\sqrt{3}t/2+\sqrt{3}g/2)^{s-1}]\\&\leqslant s[2t^{s-1}/2^s-\sqrt{3}(11\sqrt{3}/54-\sqrt{3}t/2)^{s-1}]\\&\leqslant s[2/2^s\times(2/9)^{s-1}-\sqrt{3}(11\sqrt{3}/54-\sqrt{3}/2\times 2/9)^{s-1}]<0.\end{aligned}$$

所以 $f(t,g)$ 在 D 上关于 t 是递降的, 于是

$$f(t,g)\geqslant f(2/9,g)=2[5\sqrt{3}/54+\sqrt{3}g/2]^s-4g^s-3/16.$$

设

$$\varphi(g)=f(2/9,g),\quad 0\leqslant g\leqslant 1/27.$$

由 $\varphi(g)$ 的导数可知, $\varphi(g)$ 有唯一的稳定点:

$$g_0=5\sqrt{3}/54\times[(4/\sqrt{3})^{1/(s-1)}-\sqrt{3}/2]^{-1}\approx 0.0068,$$

即 $\varphi(g_0)\approx 0.0130>0$. 另一方面, 计算 $\varphi(g)$ 的边界值:

$$\varphi(0)=5^s/(16\times 2^s)-3/16>0;\quad \varphi(1/27)=0.$$

据上述分析, 有 $f(t,g)\geqslant 0,(t,g)\in D$. 于是有 $\mu(V)\leqslant 2|V^s|$.

(2) V 不与包含在 $\triangle PRQ$ 中的 $\frac{1}{9}$-K 相交. 在图 2.6.19(c) 中, G_1,G_2 是 V 的切线, 且分别平行于 CR. G_1 与 L_1^1 相交, G_2 与包含在 $\triangle CRH$ 中的 $\frac{1}{9}$-K 相交. E,F 分别是 G_1 与 OC, G_2 与 HS 的交点. 设 $|OE|=g_1,|HF|=g_2$. 于是

$$|V|\geqslant\sqrt{3}/2\times(8/27-g_1+g_2).$$

另一方面, 据引理 2.6.23, 有

$$\mu(V) \leqslant 1/4 - \mu(g_1) + 2\mu(g_2) \leqslant 1/4 - 1.145g_1^s + 4g_2^s.$$

因此

$$2|V|^s - \mu(V) \geqslant 2[\sqrt{3}/2 \times (8/27 - g_1 + g_2)]^s + 1.145g_1^s - 4g_2^s - 1/4.$$

设

$$f(g_1, g_2) = 2[\sqrt{3}/2 \times (8/27 - g_1 + g_2)]^s + 1.145g_1^s - 4g_2^s - 1/4.$$

则 f 在区域

$$D = \{(g_1, g_2) \in R^2 : 0 \leqslant g_1 \leqslant 1/9, 0 \leqslant g_2 \leqslant 1/27\}$$

上连续. 对 g_1 求偏导数并据函数 $f(x) = x^{s-1}$ 的递增性, 有

$$\begin{aligned}
f'_{g_1} &= s[1.145g_1^{s-1} - \sqrt{3}(4\sqrt{3}/27 - \sqrt{3}g_1/2 + \sqrt{3}g_2/2)^{s-1}] \\
&\leqslant s[1.145g_1^{s-1} - \sqrt{3}(4\sqrt{3}/27 - \sqrt{3}g_1/2)^{s-1}] \\
&\leqslant s[1.145 \times (1/9)^{s-1} - \sqrt{3}(4\sqrt{3}/27 - \sqrt{3}/2 \times (1/9)^{s-1})] < 0.
\end{aligned}$$

因此 $f(g_1, g_2)$ 在 D 上关于 g_1 是递降的, 于是

$$f(g_1, g_2) \geqslant f(1/9, g_2) = 2[5\sqrt{3}/54 + \sqrt{3}g_2/2]^s - 4g_2^s - 2.855/16.$$

设 $\varphi(g_2) = f(1/9, g_2), 0 \leqslant g_2 \leqslant 1/27$. 对 $\varphi(g_2)$ 求导数, 可以得到 $\varphi(g_2)$ 的唯一稳定点:

$$g_0 = 5\sqrt{3}/54 \times [(4/\sqrt{3})^{1/(s-1)} - \sqrt{3}/2]^{-1} \approx 0.0068$$

和 $\varphi(g_0) \approx 0.0221 > 0$. 另一方面, 计算 $\varphi(g_2)$ 的边界值, 得到

$$\varphi(0) = 5^s/(16 \times 2^s) - 2.855/16 > 0.$$

据上述分析, 在 D 上, 有 $f(g_1, g_2) \geqslant 0$, 因此 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$.

情形 3. V 与 $L_1^1, L_1^2, L_1^3, L_1^4$ 中两个相交. 如果它与 L_1^1, L_1^2 或与 L_1^3, L_1^4 相交, 即与一个 $\dfrac{1}{9}$-K 相交, 我们将在下面讨论这种情况. 如果它与 L_1^1, L_1^3 或 L_1^2, L_1^4 相交, 据上述分析, 很容易得到 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$. 如果它与 L_1^1, L_1^4 相交, 类似情形 1 中的分析, 亦可得 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$. 如果它与 L_1^2, L_1^3 相交, 即与结构 N_2 相交, 将在引理 2.6.29 中给出.

情形 4. V 仅与 $L_1^1, L_1^2, L_1^3, L_1^4$ 中一个相交. 仅需考虑它与 L_1^1 相交的情形. 因为 L_1^1 与 L_1 相似, 因此对后者的讨论对前者亦适用, 亦得所需结果. 于是完成引理的证明. □

引理 2.6.28 对任意与 $M_k, k>0$ 相交的可测集 V, 除去下述两种情况:

(1) V 与包含在 M_k 内的 L_{k+1} 相交;

(2) V 与包含在 M_k 内的 $\left\{\frac{1}{3^k}-K\right\}$ 相交.

有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

证明 容易看出, 对 $k\neq k'$, M_k, M_k' 相似, 因此只需证明 $k=1$ 的情况即可. 已知 M_1 由两个 $\left\{\frac{1}{3}-K\right\}$ 构成. 在图 2.6.20 中, 设

$$M_1^1=K\cap\triangle ECR,\quad M_1^2=K\cap\triangle BEP,\quad M_1^3=K\cap\triangle BFQ,\quad M_1^4=K\cap\triangle DFS.$$

我们将考虑下面四种情形.

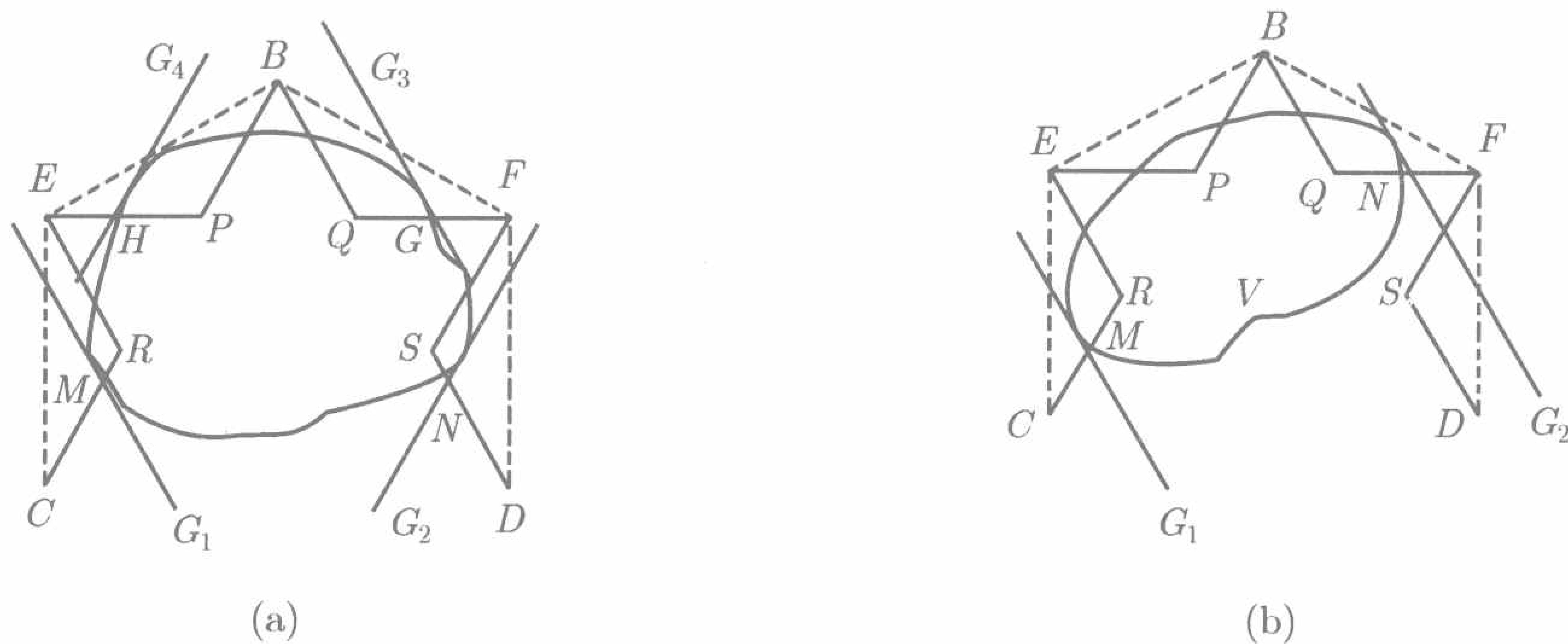


图 2.6.20 Koch 曲线

情形 1. V 与 $M_1^1, M_1^2, M_1^3, M_1^4$ 都相交. 在图 2.6.20 中, G_1, G_2, G_3, G_4 分别是 $V\cap M_1^1, V\cap M_1^4, V\cap M_1^3, V\cap M_1^2$ 的切线. G_1, G_3 与 BD 平行, G_2, G_4 与 BC 平行. M, N, G, H 分别是 G_1 与 CR, G_2 与 SD, G_3 与 FQ, G_3 与 EP 的交点. 设 $|CM|=g_1, |DN|=g_2, |FG|=g_3, |EH|=g_3$. 于是有

$$|V|\geqslant\sqrt{3}/9+\sqrt{3}/2\times(1/9-g_2)+\sqrt{3}/2(1/9-g_4).$$

另一方面, 据引理 2.6.25,

$$\mu(V)\leqslant 1/2-\mu(g_1)-\mu(g_2)-\mu(g_3)-\mu(g_4)\leqslant 1/2-1.145(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s).$$

因而

$$2|V|^s-\mu(V)\geqslant 2[\sqrt{3}/9+\sqrt{3}/4\times(4/9-g_1-g_2-g_3-g_4)]^s+1.145(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s)-1/2.$$

易见函数

$$f(g_1,g_2,g_3,g_4)=[\sqrt{3}/9+\sqrt{3}/4\times(4/9-g_1-g_2-g_3-g_4)]^s+1.145(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s)-1/2$$

连续. 分别对四个变量求偏导数. 经过简单计算可得, 其唯一稳定点:

$$g_1^0 = g_2^0 = g_3^0 = g_4^0 = 2\sqrt{3}/9 \times [\sqrt{3} + (2.29/\sqrt{3})^{1/(s-1)}]^{-1}.$$

令

$$D_1 = \{(g_1, g_2, g_3, g_4) : 0 \leqslant g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \leqslant 4/9\}.$$

经过简单计算可知, 函数 f 在 D_1 上的极小值大于 0. 有

$$f(g_1^0, g_2^0, g_3^0, g_4^0) \approx 0.0304 > 0.$$

因为函数 $f(x^s)(s > 1)$ 是下凸函数, 故

$$\begin{aligned}
&f(g_1, g_2, g_3, g_4)\\
\geqslant &2[\sqrt{3}/9 + \sqrt{3}/4 \times (4/9 - g_1 - g_2 - g_3 - g_4)]^s + 4 \times 1.145 \left[\frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}\right]^s - 1/2\\
= &2(\sqrt{3}/9)^s + 4 \times 1.145 \times (1/9)^s - 1/2 > 0.
\end{aligned}$$

当 $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 0$ 时, 有 $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0, f(0,0,0,0) = 2^s/2 - 1/2 > 0$. 通过上面讨论即得 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$.

情形 2. V 与 $M_1^1, M_1^2, M_1^3, M_1^4$ 中三个相交. 如果 V 与 M_1^1, M_1^3, M_1^4 或者与 M_1^1, M_1^2, M_1^4 相交, 讨论与情形 1 相似, 有 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$. 如果 V 与 M_1^1, M_1^2, M_1^4 或者 M_1^2, M_1^3, M_1^4 相交, 仅需讨论前者. 在图 2.6.20 中, G_1, G_2 是 V 的切线, 且它们平行 BD. G_1 与 M_1^1 相交, G_2 与 M_1^3 相交. M, N 分别是 G_1, G_2 与 CR, QF 的交点. 设 $|CM| = g_1, |FN| = g_2$. 于是有 $|V| \geqslant \sqrt{3}/2 \times (4/9 - g_1 - g_2)$. 另一方面, 据引理 2.6.25, 有

$$\mu(V) \leqslant 3/8 - \mu(g_1) - \mu(g_2) \leqslant 3/8 - 1.145(g_1^s + g_2^s).$$

因此

$$2|V|^s - \mu(V) \geqslant 2[\sqrt{3}/2 \times (4/9 - g_1 - g_2)]^s + 1.145(g_1^s + g_2^s) - 3/8.$$

设

$$f(g_1, g_2) = 2[\sqrt{3}/2 \times (4/9 - g_1 - g_2)]^s + 1.145(g_1^s + g_2^s) - 3/8, \quad 0 \leqslant g_i \leqslant \frac{1}{9}, \quad i = 1, 2.$$

对 g_1 求偏导数, 且据函数 $f(X) = x^{s-1}$ 的递升性, 得

$$\begin{aligned}
f'_{g_1} &= s[1.145 g_1^{s-1} - \sqrt{3}(2\sqrt{3}/9 - \sqrt{3}g_1/2 - \sqrt{3}g_2/2)^{s-1}]\\
&\leqslant s[1.145 g_1^{s-1} - \sqrt{3}(\sqrt{3}/6 - \sqrt{3}g_1/2)^{s-1}]\\
&\leqslant s[1.145 \times (1/9)^{s-1} - \sqrt{3}(\sqrt{3}/6 - \sqrt{3}/2 \times 1/9)^{s-1}] < 0.
\end{aligned}$$

所以 $f(g_1,g_2)$ 在区域 $D=\{(g_1,g_2)\in R^2:0\leqslant g_i\leqslant 1/9, i=1,2\}$ 上关于 g_1 是递降的. 类似的分析得 $f(g_1,g_2)$ 在 D 上关于 g_2 也递降. 于是 $f(g_1,g_2)\geqslant f(1/9,1/9)>0$, 因而 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

情形 3. V 与 M_1^1,M_1^2,M_1^3,M_1^4 中两个相交. 如果它与 M_1^1,M_1^3 或 M_1^1,M_1^4 或 M_1^2,M_1^4 相交, 借助情形 1 和情形 2 中的讨论, 亦有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$. 如果它与 M_1^1,M_1^2 或与 M_1^2,M_1^3 相交, 即与 $\{1/3-K\}$ 相交, 将在下面讨论.

情形 4. V 仅与 M_1^1,M_1^2,M_1^3,M_1^4 中一个相交, 即与结构 L_2 相交, 这在引理 2.6.27 中已讨论过.

至此引理得证. □

引理 2.6.29 可测集 V 与结构 $N_k(k>1)$ 相交, 除了下面两种情形:

(1) V 与包含在 N_k 内的 L_k 相交;

(2) V 与包含在 N_k 内的 $\{1/3^k-K\}$, 有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

证明 容易看出 $N_k,N_{k'},k\neq k'$ 相似, 所以只需证明 $k=2$. 显然 N_2 由四个 $\{1/9-K\}$ 构成 (见图 2.6.21(a)). 设 $N_2^1=K\cap\triangle BCP, N_2^2=K\cap\triangle CDQ, N_2^3=K\cap\triangle DER, N_2^4=K\cap\triangle EFS$. 我们将讨论下述四种情形.

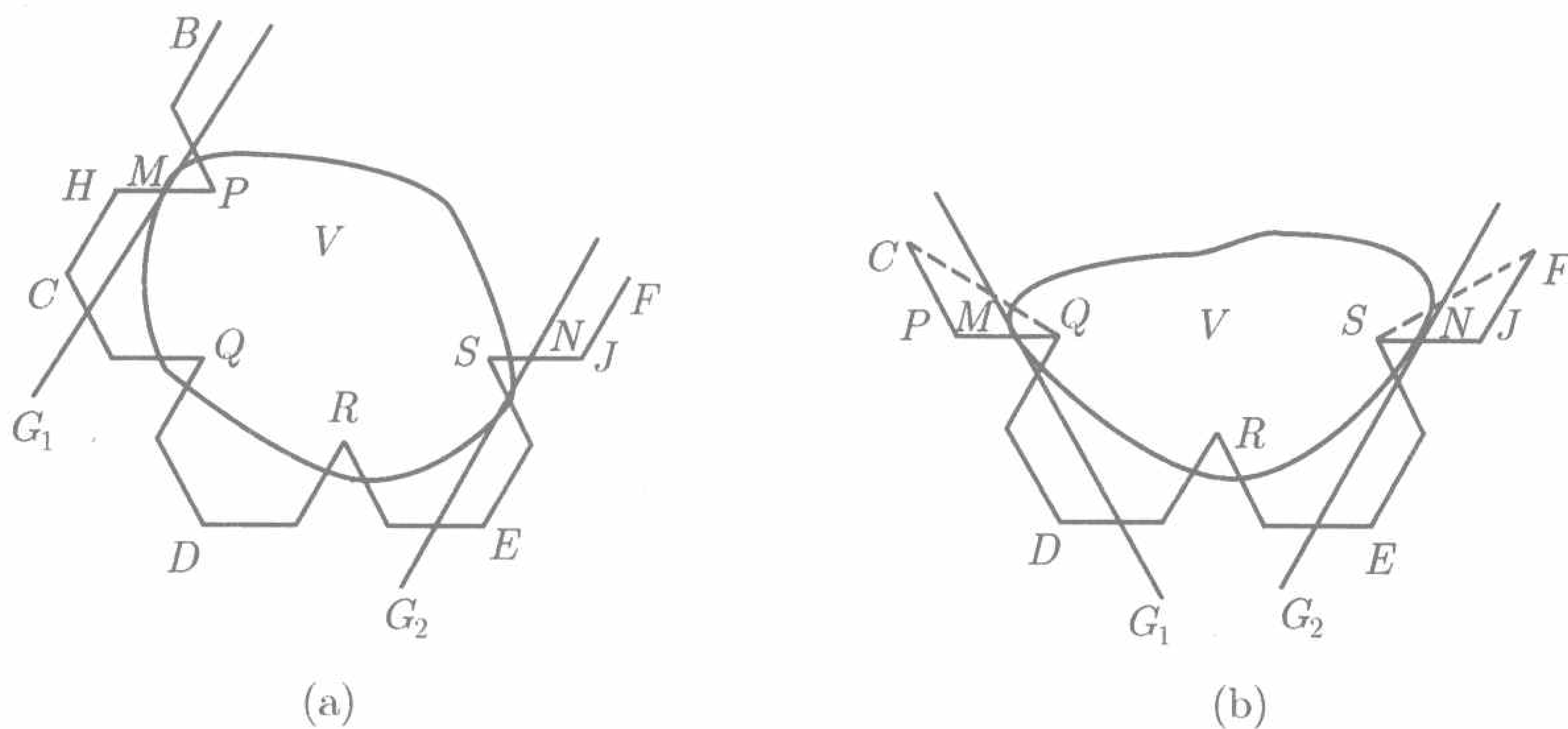


图 2.6.21 Koch 曲线

情形 1. V 与 N_2^1,N_2^2,N_2^3,N_2^4 相交. 在图 2.6.21(a) 中, G_1,G_2 是 V 的切线, 它们平行于 BC. G_1,G_2 分别与 $N_2^1;N_2^4$ 相交. M,N 分别是 G_1,G_2 与 HP,SJ 的交点. 设 $|PM|=g_1,|SN|=g_2$. 于是有

$$|V|\geqslant 2\sqrt{3}/27+\sqrt{3}(g_1+g_2)/2.$$

另一方面, 据引理 2.6.23, 有

$$\mu(V)\leqslant 1/8+2\mu(g_1)+2\mu(g_2)\leqslant 1/8+4(g_1^s+g_2^s).$$

故

$$2|V|^s-\mu(V)\geqslant 2[2\sqrt{3}/27+\sqrt{3}(g_1+g_2)/2]^s-1/8-4(g_1^s+g_2^s).$$

设

$$f(g_1,g_2)=2[2\sqrt{3}/27+\sqrt{3}(g_1+g_2)/2]^s-1/8-4(g_1^s+g_2^s).$$

那么, f 在区域

$$D=\{(g_1,g_2)\in R^2: 0\leqslant g_i\leqslant 1/27, i=1,2\}$$

上连续. 容易得到它的唯一稳定点:

$$g_1^0=g_2^0=2\sqrt{3}/27\times[(4/\sqrt{3})^{1/(s-1)}-\sqrt{3}]^{-1}.$$

易计算 $f(g_1^0,g_2^0)\approx 0.0278>0$. 下面考虑函数 f 的边界点的值.

当 $g_2=0, f(g_1^0,0)=2[2\sqrt{3}/27+\sqrt{3}g_1/2]^s-1/8-4g_1^s$ 时, 简单计算可得, 函数 $f(g_1,0)$ 的唯一稳定点为

$$g_1^0=2\sqrt{3}/27\times[(4/\sqrt{3})^{1/(s-1)}-\sqrt{3}/2]^{-1},$$

故 $f(g_1^0,0)\approx 0.0263>0$. 另一方面,

$$f(0,0)=2^s/16-1/8>0,\quad f(1/27,0)=5^s/16\times 2^s-3/16>0.$$

当 $g_2=1/27, f(g_1,1/27)=2(5\sqrt{3}/54+\sqrt{3}g_1/2)^s-4g_1^s-3/16$ 时, 简单计算可得, $f(g_1,1/27)$ 的唯一稳定点 $g_1^0=5\sqrt{3}/54[(4/\sqrt{3})^{1/(s-1)}-\sqrt{3}/2]^{-1}$ 和 $f(g_1^0,1/27)\approx 0.0130>0$. 另一方面, $f(0,1/27)=5^s/(16\times 2^s)-3/16>0, f(1/27,1/27)=0$.

对 $g_1=0, g_1=1/27$, 类似地, 可得 $f(0,g_2)>0, f(1/27,g_2)>0, 0\leqslant g_2\leqslant 1/27$.

借助上述分析, 在 D 的边界上, 有 $f(g_1,g_2)>0$. 于是, 在 D 上亦有 $f(g_1,g_2)>0$. 所以 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$,

情形 2. V 与 N_2^1,N_2^2,N_2^3,N_2^4 中三个相交. 如果它与 N_2^1,N_2^3,N_2^4 或 N_2^1,N_2^2,N_2^4 相交, 那么 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$, 其讨论与情形 1 相同. 如果它与 N_2^1,N_2^2,N_2^3 或 $N_2^2,N_2^3N_2^4$ 相交, 仅需讨论后者 (见图 2.6.21(b)), 分如下两步:

(1) 如果 V 不与包含在 $\triangle CQP,\triangle SFJ$ 内的 Koch 曲线相交, 那么 $|V|\geqslant 1/9$, 从而 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

(2) V 与包含在 $\triangle CQP,\triangle SFJ$ 内的 Koch 曲线相交. 在图 2.6.21(b) 中, 直线 G_1,G_2 分别平行直线 CD,EF. G_1,G_2 分别与 $V\cap\triangle CQP, V\triangle SFJ$ 相切. M,N 分别是它们与直线 PQ,SJ 的交点. 设 $|QM|=g_1,|SN|=g_2$, 那么 $|V|\geqslant 1/9+g_1+g_2$. 应用引理 2.6.23 到包含在 $\triangle CQP,\triangle SFJ$ 的 Koch 曲线, 可得 $\mu(V)\leqslant 1/8+\mu(g_1)+\mu(g_2)\leqslant 1/8+2(g_1^s+g_2^s)$. 于是

$$2|V|^s-\mu(V)\geqslant 2[1/9+g_1+g_2]^s-2(g_1^s+g_2^s)-1/8.$$

设

$$f(g_1,g_2)=2[1/9+g_1+g_2]^s-2(g_1^s+g_2^s)-1/8.$$

在区域

$$D=\{(g_1,g_2)\in R^2: 0\leqslant g_i\leqslant 1/27, i=1,2\}$$

上分析该函数的值, 先对 g_1 求偏导数, 并利用 $f(x)=x^{s-1}$ 的递升性, 可得

$$\begin{aligned}f'_{g_1}&=2s[(1/9+g_1+g_2)^{s-1}-g_1^{s-1}]\geqslant 2s[(1/9+g_1)^{s-1}-g_1^{s-1}]\\&\geqslant 2s[(1/9)^{s-1}-(1/27)^{s-1}]>0.\end{aligned}$$

于是 $f(g_1,g_2)$ 在 D 上关于 g_1 是递升的. 对 g_2 有类似结论. 于是 $f(g_1,g_2)\geqslant f(0,0)>0$, 从而

$$\mu(V)\leqslant 2|V|^s.$$

情形 3. V 与 $N_2^1,N_2^2,N_2^3N_2^4$ 中两个相交. 如果它与 V 与 N_2^1,N_2^3 或 V 与 N_2^2,N_2^4 相交, 有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$, 情形类似情形 2. 如果它与 N_2^1,N_2^4 相交, 亦有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$, 情形类似情形 1. 如果它与 N_2^1,N_2^2 或 N_2^2,N_2^3 或 N_2^3,N_2^4 相交, 即它与结构 L_2 相交, 所需结论由引理 2.6.27 给出.

情形 4. V 与 N_2^1,N_2^2,N_2^3,N_2^4 中一个相交, 即它与 $\left\{\frac{1}{9}-K\right\}$ 相交, 其讨论在下面给出. □

定理 2.6.22 的证明 据质量分布原理, 只需证明, 对任何与 K 相交的可测集 V, 有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$ 即可. 已知 Koch 曲线包含在 $\triangle OAB$ 内 (见图 2.6.22). 可设总有 $V\subset\triangle OAB$, 并设

$$K_1^1=K\cap\triangle OCM,\quad K_1^2=K\cap\triangle CBP,\quad K_1^3=K\cap\triangle BDQ,\quad K_1^4=K\cap\triangle DAN.$$

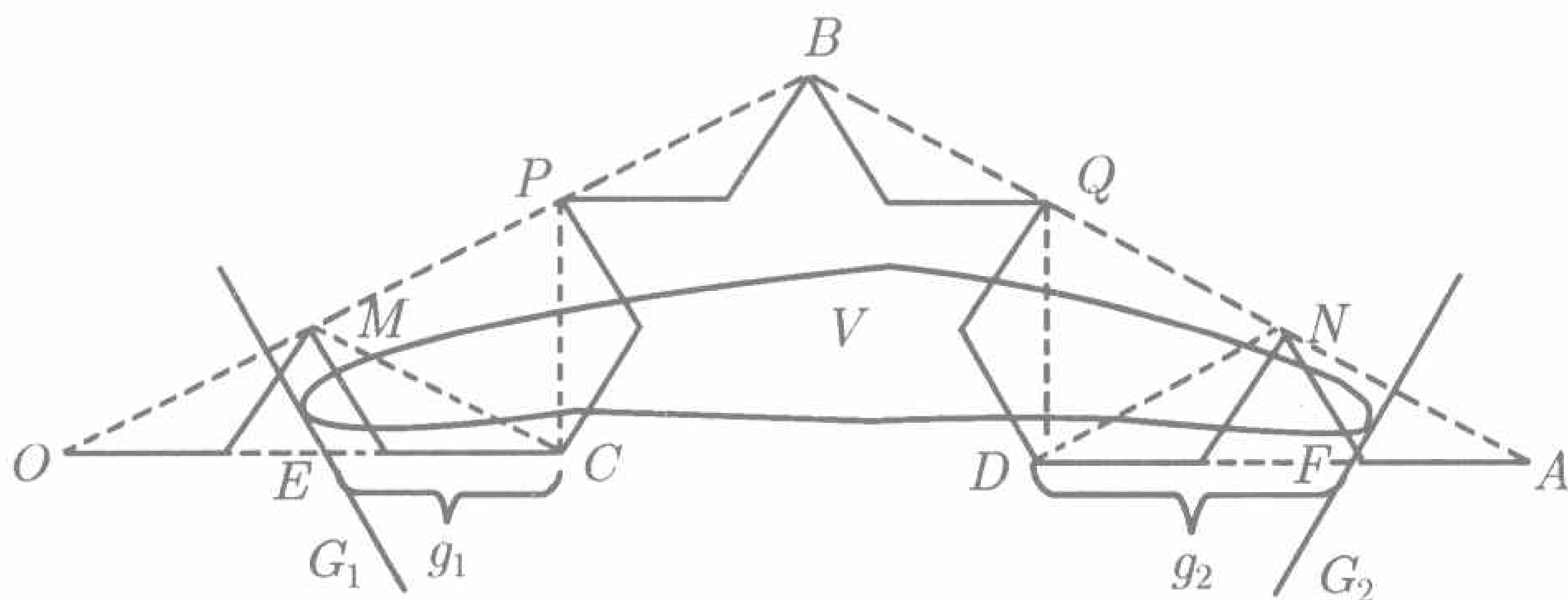


图 2.6.22 Koch 曲线

分四种情形讨论:

情形 1. V 与 K_1^1,K_1^2,K_1^3,K_1^4 相交. 在图 2.6.22 中, G_1,G_2 与 V 相切, 且它们分别与 BD,BC 平行. E,F 分别是它们与 OA 的交点. 设 $g_1=|CE|,g_2=|DF|$.

那么 $|V| \geqslant 1/3 + g_1 + g_2$. 另一方面, 据引理 2.6.25,

$$\mu(V) \leqslant 1/2 + \mu(g_1) + \mu(g_2) \leqslant 1/2 + 2(g_1^s + g_2^s).$$

于是

$$2|V|^s - \mu(V) \geqslant 2(1/3 + g_1 + g_2)^s - 2(g_1^s + g_2^s) - 1/2.$$

设

$$f(g_1, g_2) = 2(1/3 + g_1 + g_2)^s - 2(g_1^s + g_2^s) - 1/2, \quad 0 \leqslant g_i \leqslant 1/3, \quad i = 1, 2.$$

通过简单的分析可知, 在区域

$$D = \{(g_1, g_2) \in R^2 : 0 \leqslant g_i \leqslant 1/3, i = 1, 2\}$$

上, $f(g_1, g_2)$ 对两个变量均是递增的, 于是 $f(g_1, g_2) \geqslant f(0,0) = 0$, 从而 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$.

情形 2. V 与 $K_1^1, K_1^2, K_1^3, K_1^4$ 中三个相交. 这种情形分下述两步考虑:

(1) 如果 V 与 K_1^1, K_1^3, K_1^4 或 K_1^1, K_1^2, K_1^4 相交. 借助情形 1 的讨论, 立即得

$$\mu(V) \leqslant 2|V|^s.$$

(2) 如果 V 与 K_1^2, K_1^3, K_1^4 或 K_1^1, K_1^2, K_1^3 相交. 仅需考虑前者. 在图 2.6.23 中, G, T 是 BC 的两条平行线. G, T 分别与 $V \cap \triangle BCP, V \cap K_1^4$ 相切. R, S 分别是 G, T 与 PF, DA 的交点. 设 $|PR| = g, |AS| = t$. 于是 $|V| \geqslant 7\sqrt{3}/18 - \sqrt{3}g/2 - \sqrt{3}t/2$. 另一方面, 据引理 2.6.23 和引理 2.6.25, 有

$$\mu(V) \leqslant 3/4 - 2\mu(g) - \mu(t) \leqslant 3/4 - 2.29g^s - 2t^s/2^s.$$

于是

$$2|V|^s - \mu(V) \geqslant 2(7\sqrt{3}/18 - \sqrt{3}g/2 - \sqrt{3}t/2)^s + 2.29g^s + 2t^s/2^s - 3/4.$$

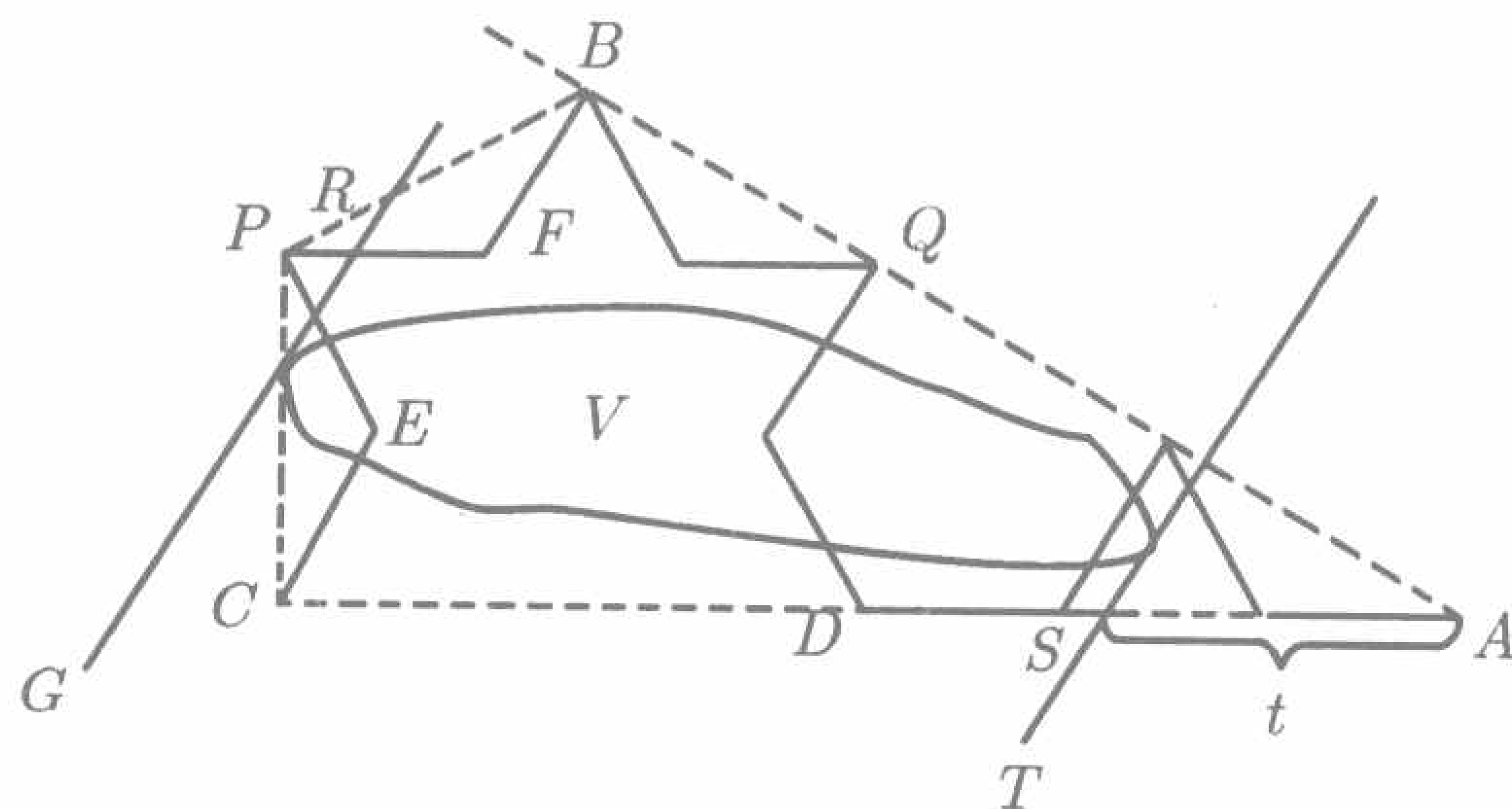


图 2.6.23　Koch 曲线

设

$$f(g,t)=2(7\sqrt{3}/18-\sqrt{3}g/2-\sqrt{3}t/2)^s+2.29g^s+2t^s/2^s-3/4.$$

于是, 在区域

$$D=\{(g,t)\in R^2:0\leqslant g\leqslant 1/9,0\leqslant t\leqslant 1/3\}$$

上 $f(g,t)$ 是连续的. 对 t 求偏导数, 并据 $f(x)=x^{s-1}$ 的递增性, 可得

$$\begin{aligned}f'_t&=s[2t^{s-1}/2^s-\sqrt{3}(7\sqrt{3}/18-\sqrt{3}g/2-\sqrt{3}t/2)^{s-1}]\\&\leqslant s[2t^{s-1}/2^s-\sqrt{3}(7\sqrt{3}/18-\sqrt{3}/18-\sqrt{3}t/2)^{s-1}]\\&\leqslant s[2\times(1/3)^{s-1}/2^s-\sqrt{3}(\sqrt{3}/3-\sqrt{3}/2\times 1/3)^{s-1}]<0.\end{aligned}$$

于是

$$f(g,t)\geqslant f(g,1/3)=2(2\sqrt{3}/9-\sqrt{3}g/2)^{s-1}+2.29g^s+1/2\times 2^s-3/4.$$

设

$$\varphi(g)=f(g,1/3),\quad 0\leqslant g\leqslant 1/9.$$

简单分析可得 $\varphi(g)$ 的唯一稳定点为

$$g_0=2\sqrt{3}/9\times((2.29/\sqrt{3})^{1/(s-1)}+\sqrt{3}/2)^{-1}$$

和 $\varphi(g_0)\approx 0.0184>0$. 另一方面, 可以得到 $\varphi(g)$ 的边界值:

$$\varphi(0)=2^s/4+1/2\times 2^s-3/4>0,\quad \varphi(1/9)=1/2^s+2.29/16+1/(2\times 2^s)-3/4>0.$$

于是据上述讨论, 有

$$\mu(V)\leqslant 2|V|^s.$$

情形 3. V 与 K_1^1,K_1^2,K_1^3,K_1^4 中两个相交. 分下面三步讨论:

(1) 如果 V 与 K_1^1,K_1^4 两个相交. 显然 $|V|\geqslant 1/3,\mu(V)\leqslant 1/2$, 所以 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

(2) 如果 V 与 K_1^1,K_1^3 或 K_1^2,K_1^4 相交, 由情形 2, 立即得 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

(3) 如果 V 与 K_1^1,K_1^2 或 K_1^2,K_1^3 相交. 注意在引理 2.6.27 讨论的结构 L_1 由 K_1^1,K_1^2 构成和在引理 2.6.28 讨论的 M_1 由 K_1^2,K_1^3 构成. 据引理 2.6.27～ 引理 2.6.29, 除下面三种情形, 有 $\mu(V)\leqslant 2|V|^s$.

(a) V 与包含在 L_1 中的 $\left\{\dfrac{1}{3}-K\right\}$ 相交;

(b) V 与包含在 N_2 中的 $\left\{\dfrac{1}{3^2}-K\right\}$ 相交;

(c) V 与包含在 N_2 中的 L_2 相交.

对 (a) 和 (b), 重复从情形 1 到情形 3 的讨论, 对 (c) 再次应用引理 2.6.27～ 引理 2.6.29, 并利用归纳法, 可得下面结果:

(i) $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$;

(ii) V 仅与某个 $L_k(k>1)$ 相交, 令 $k \to \infty$, 于是 $\mu(V) = 0 \leqslant 2|V|^s$;

(iii) V 仅与某个 $\left\{\frac{1}{3^k} - K\right\}(k>1)$ 相交, 令 $k \to \infty$, 于是有 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$.

情形 4. V 与 $K_1^1, K_1^2, K_1^3, K_1^4$ 中一个相交. 不失一般性, 可以仅仅考虑 V 与 K_1^1 相交. 重复情形 1 到情形 3 的讨论, 并利用归纳法, 可以得到: 或者 $\mu(V) \leqslant 2|V|^s$, 或者 V 仅与某个 $\left\{\frac{1}{3^k} - K\right\}(k>1)$ 相交. 显然, $\mu(V) \leqslant 1/4^k$. 令 $k \to \infty$, 于是 $\mu(V) = 0 \leqslant 2|V|^s$.

从上述讨论, 据质量分布原理, 立即得到 $\mathcal{H}^s(K) \geqslant 1/2 = 0.5$. 定理得证. □

上面给出三个经典自相似集: Sierpinski 垫片、$C \times C$ 和 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度的估计. 读者从中可以看到, 这种估计是非常困难而又繁杂的, 其中尤以估计 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度为更困难. 上述估计还可以不断改进而得到更好的结果. 我们知道最好的上、下限就是准确值. 但是, 是否可以通过改进上、下限的办法最后得到准确值呢? 一般说来是办不到的, 特别是当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时, 其原因是与 $\mathcal{H}$ 测度的定义有关. 下一章就来探讨这个问题.

2.7　满足强分离条件的自相似集上的动力系统

强分离条件比开集条件强, 因此前者应该有更好的性质, 至少在讨论中应该给我们带来一些方便, 但至今为止尚未发现这种情形的例子. 下面关于在强分离条件下的结果认证了上面的讨论, 说明强分离条件的确有开集条件所没有的性质. 以后还会涉及这个问题.

设 $E \subset R^n$ 是满足强分离条件的自相似集, 由相似压缩函数系 $\{S_i, i=1,\cdots,m\}, m>1$ 生成, 对应的相似比为 $\{c_1,\cdots,c_m\}$ 且 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 定义

$$\begin{cases} f: E \to E, \\ f(x) \mapsto S_i^{-1}(x), \quad \forall x \in S_i(E). \end{cases} \tag{2.7.1}$$

由于 $S_i(E) \cap S_j(E) = \varnothing, 0 < i < j \leqslant m$, 故 f 是完全确定的且连续.

定理 2.7.1　*作为以 E 为支撑的测度, $\mathcal{H}^s$ 是 f 的不变的遍历测度. 进而, $\mathcal{H}^s$ 是 f 的极大熵测度当且仅当 $c_i = c, i=1,\cdots,m$.*

证明 设 A 是一个可测集, 易见 $f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$ 是不相交的并. 据测度的基本性质和缩放比例性质, 有

$$\mathcal{H}^s(f^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_i(A)) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A),$$

因此 $\mathcal{H}^s$ 对 f 不变.

下设 $A = f^{-1}A$. 对任意的 $k > 0$ 和任意的 $i = (i_1 i - 2 \cdots i_k) \in J_k$,

$$A = f^{-1}(A) = \bigcup_{i \in J_k} S_{i_1} \cdots S_{i_k}(A).$$

显然 $A \bigcap E_{i_1 \cdots i_k} = S_{i_1} \cdots S_{i_k}(A)$, 利用缩放比例性质, 得

$$\mathcal{H}^s(A \cap E_i) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(E_i)\mathcal{H}^s(E)^{-1}\mathcal{H}^s(A).$$

设 $\mathcal{C}$ 是由满足方程

$$\mathcal{H}^s(A \cap U) = \mathcal{H}^s(U)\mathcal{H}^s(E)^{-1}\mathcal{H}^s(A) \tag{2.7.2}$$

的集合 $U \subset E$ 组成的集合族. 上面已经证明 $E_i \in \mathcal{C}, \forall i = (i_1 \cdots i_k) \in J_k$, 由测度的可数可加性知, 这样集合的任意可数并亦属于 $\mathcal{C}$. 再据测度的正则性, 对任意可测集 $U \subset E$, 存在下降到这个集合的可数的开集合序列, 故对任意可测集 $U \subset \mathcal{C}$. 取 $U = A$, 即有

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A \cap A) = \mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^s(E)^{-1},$$

因而 $\mathcal{H}^s(A) = 0$ 或 $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(E)$, 所以 $\mathcal{H}^s$ 是遍历的 [7].

下面证明定理的下半部分 [38]. 设 $S = \{1, 2, \cdots, m\}$ 是由 m 个符号构成的状态空间, $\Sigma_m = \{i = (i_1 i_2 \cdots) : i_n \in S, \forall n > 0\}$ 是 S 上的单边符号空间, $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ 是转移自映射. 已知对任意的 $i = (i_1 i_2 \cdots) \in \Sigma_m$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{i_1} \cdots S_{i_n}(E)$ 是单点集, 用 $x_i \in E$ 表示这个点. 定义

$$\begin{cases} h : \Sigma_m \to E, \\ h(i) \mapsto x_i, \forall i \in \Sigma_m. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

容易验证 h 是在上拓扑映射, 是从 σ 到 f 的拓扑共轭, 即 $h\sigma = fh$, 所以它们的拓扑熵相等, 即 $\mathrm{ent}(\sigma) = \mathrm{ent}(f) = \log m$. 不难看出

$$h(\{i = (i_1 i_2 \cdots) : i_1 = j\}) = S_j(E), \quad j = 1, \cdots, m \tag{2.7.4}$$

且 h 诱导出一个从 $M(\Sigma_m, \sigma)$ 到 $M(E, f)$ 的仿射同胚, 它们分别是 σ 和 f 的不变概率测度的集合:

$$\begin{cases} h^* : M(\Sigma_m, \sigma) \to M(E, f), \\ h^*(\eta(A)) = \eta(h^{-1}(A)), \quad \forall \eta \in M(\Sigma_m, \sigma), \forall A \in \mathcal{B}(E), \end{cases} \tag{2.7.5}$$

其中 $\mathcal{B}(E)$ 表示 E 的 σ 代数. 所以存在唯一的 $\eta \in M(\Sigma_m, \sigma)$ 使得

$$h^*(\eta) = \frac{1}{\mathcal{H}^s(E)}\mathcal{H}^s.$$

取 $A = S_j(E)$, 据 (2.7.4) 和 h^* 的定义, 易见

$$\eta(\{i = (i_1 i_2 \cdots) : i_1 = j\}) = \frac{1}{\mathcal{H}^s(E)}\mathcal{H}^s(S_j(E)) = c_j^s, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

注意到 $c_1^s, \cdots, c_m^s$ 是概率向量, σ 是关于 η 的 $c_1^s, \cdots, c_m^s$ 转移自映射. 据文献 [24], 有

$$h_\eta(\sigma) = -\sum_{j=1}^{m} c_j^s \log c_j^s.$$

据文献 [21] 的定理 4.2 和推论 4.2.1,

$$h_\eta(\sigma) = \log m$$

当且仅当 $c_i = c, i = 1, 2, \cdots, m$. 进而不难看出, 同胚 $h : \Sigma_m \to E$ 诱导出概率空间 $(\Sigma_m, \mathcal{B}(\Sigma_m), \eta)$ 到概率空间 $\left(E, \mathcal{B}(E), \dfrac{1}{\mathcal{H}^s(e)}\mathcal{H}^s\right)$ 的同构. 据文献 [24] 的定理 4.11, 有

$$h_\eta(\sigma) = h_{\frac{1}{\mathcal{H}^s(E)}\mathcal{H}^s}(f).$$

综上所述, 得到

$$h_{\frac{1}{\mathcal{H}^s(E)}\mathcal{H}^s}(f) = \mathrm{ent}(f) = \log m \Leftrightarrow c_j = c, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \qquad \square$$

当压缩比不完全相同时, $\mathcal{H}^s$ 不是极大熵测度, 但其测度熵亦可确定 [24].

2.8　强分离条件逼近开集条件

对仅满足开集条件的自相似集, 显然不能定义上节讨论的动力系统. 这说明在强分离条件下, 自相似集有更好的形状. 至少说明两种情形是有区别的, 用以研究强分离条件的方法有时不能直接适用于开集条件. 但可否通过其他方法, 例如通过一个极限过程, 使用于强分离条件的方法间接用于开集条件的情形? 我们知道, 有时开集条件可以用强分离条件逼近, 这样的例子很多, 例如, 离散的垫片可以逼近 Sierpinski 垫片 (见图 2.8.1, 其中 $0 < r < 1/2$). 这里事实上提出了一个也许更深

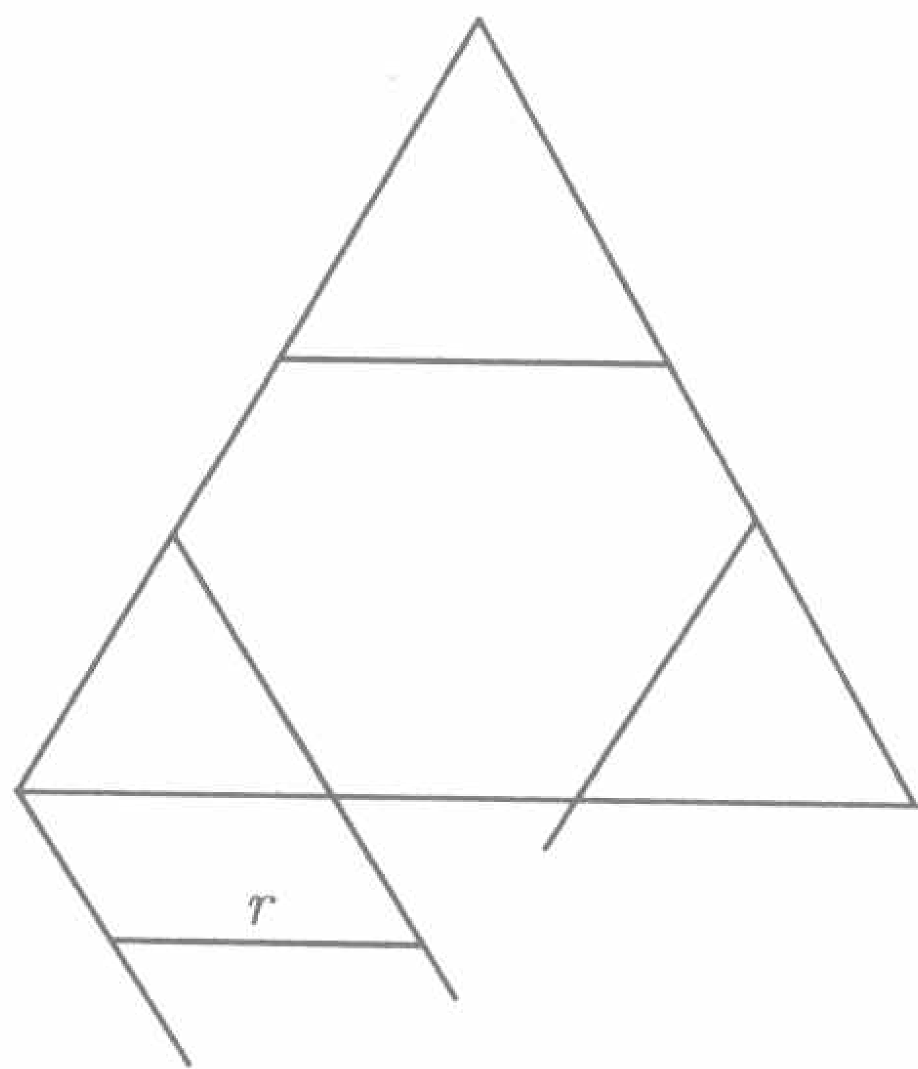


图 2.8.1　离散的垫片

刻的理论问题, 即一般而言, 开集条件可以用强分离条件去逼近吗?

这里所说用强分离条件逼近开集条件有两层意义：一是在 Hausdorff 度量意义下集合极限的逼近, 二是在集合逼近的情形下是否还有维数和测度的连续性? 例如, 从直观上易见, Sierpinski 垫片和 Koch 曲线均可用离散的相应情形 (满足强分离条件) 在第一层意义下去逼近, 因为它们都有一个凸开集作为恰当集. 一般情形这个结论是否也成立? 这样的条件是否是必要的? 至于它们是否是在第二层意义下的逼近, 即是否有维数和测度的连续性, 情况就比较复杂, 至少不是显然的, 不能轻易下结论. 其中维数的连续性似乎比较容易看出 (但亦需证明), 而是否有测度的连续性则要复杂得多. 以后将证明, 有凸开集作为恰当集的开集条件可以用强分离条件在第一层意义下逼近, 且保持维数的连续性. 为此, 先要引进一些新的概念和符号.

记 $\mathcal{C}$ 为 $R^n(n>1)$ 中所有紧致子集的集合族, $\rho:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to R$ 为其上的 Hausdorff 度量. 设 $T=T(f_1,\cdots,f_m)$ 为满足强分离条件的自相似集, 并记

$$\omega=\frac{1}{4}\min\{|f_i(T)|-|f_j(T)|,i\neq j\}.$$

记

$$X=\{z\in R^n:\rho(z,T)\leqslant\omega\}.$$

易见, X 至少包含 m 个连通分支. 对每个相似压缩 f_k, 存在 $n\times n$ 正交方阵 A_k, 点 $a_k\in R^n$ 和常数 p_k, 满足

$$f_k(x)=p_kA_k(x)+a_k.$$

不失一般性, 可设 $|X|=1$ 且 X 包含原点.

易见存在常数 $\tau>0$, 使得

(1) $[p_k-\tau,p_k+\tau]\subset(0,1),\forall 1\leqslant k\leqslant m$;

(2) 对任意的相似压缩函数系 $\{g_k\}$, 若

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sup\{|f_k(x)-g_k(x)|:|x|\leqslant 1\}\leqslant\tau,$$

则

$$\bigcup_1^m g_k(X)\subset X,$$

且

$$\min\{|g_i(X)-g_j(X)|:i\neq j\}\geqslant\omega.$$

下面记 Φ 为 X 上所有形如

$$\{g_1,\cdots,g_m\}=\{g_k\}$$

的满足开集条件的相似压缩函数系的集合, 其中

$$g_k(X) \subset X, \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

即是 X 上的相似压缩, 相似比为 c_{g_k} 生成的自相似集记为 G. 不失一般性, 下面恒设 Φ 中的自相似集的 Hausdorff 维数有一个常正数的下界. 存在唯一的概率测度 μ_G 满足

$$\mu_G(B) = \sum_1^m c_k^{\dim_{\mathcal{H}}(G)} \mu_G(g_k^{-1}(B)), \tag{2.8.1}$$

其中 B 为可测集. 这个概率测度称作 G 的自然质量分布或自相似测度.

设 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi$ 定义

$$\phi(\{g_k\}, \{h_k\}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} (|g_k(x) - h_k(x)| : |x| \leqslant 1),$$

其中 $|x|$ 表 x 的模, 即 x 到原点的距离. 容易验证 ϕ 是一个度量. 可以验证, 对所有的

$$\{g_k, k = 1, \cdots, m\} \in \Phi,$$

其吸引子是满足强分离条件的自相似集. 容易证明下述结论.

引理 2.8.1　设 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi, G, H$ 分别是其吸引子, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当

$$\phi(\{g_k\}, \{h_k\}) \leqslant \delta$$

时

$$|\dim_{\mathcal{H}} G - \dim_{\mathcal{H}} H| < \varepsilon,$$

即 $\{g_k\}, \{h_k\}$ 在度量 ϕ 下充分接近时, 它们的吸引子的 Hausdorff 维数也充分接近.

这可从满足开集条件的自相似集的维数公式中看出, 证明从略.

引理 2.8.2　设 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi, \mu_G, \mu_H$ 分别是它们的吸引子上的自然质量分布, 则对所有正数 ε, δ, 存在正数 δ_1, 使得对任意闭集 $Y \subset X$ 及其 δ 邻域 $Y_\delta = \{z : \rho(z, Y) \leqslant \delta\}$, 不等式 $\mu_G(Y_\delta) \geqslant \mu_H(Y) - \varepsilon$ 恒成立.

证明　设选取正整数 N, 使得对任意 $\{g_k\} \in \Phi$ 和任意正整数列 $(k_1, \cdots, k_N) \in \{1, \cdots, m\}$, 都有

$$|g_{k_1} \cdots g_{k_N}(X)| < \frac{\delta}{2}.$$

对 $\delta > 0$, 任意取定 $\delta_2 \in \left(0, \frac{1}{6}\delta(1-p)\right)$, 其中

$$p = \max\{p_k + \tau : 1 \leqslant k \leqslant m\},$$

则当 $\phi(\{g_k\},\{h_k\})<\delta_2$ 时, $\rho(g_k(Y),h_k(Y))<\frac{1}{2}(1-p)\delta$ 对任意紧致子集 $Y\subset X$ 和 $1\leqslant k\leqslant m$ 都成立. 因此, 对任意 $j>0$ 和 $(k_1,\cdots,k_j)\in\{1,\cdots,m\}$, 下式恒成立:

$$\rho(g_{k_j}\cdots g_{k_1}(X),h_{k_j}\cdots h_{k_1}(X))<\frac{\delta}{2}.$$

由前一个引理, 对 $\varepsilon>0$, 可选取 $\delta_1\in(0,\delta_2)$, 使得当 $\phi(\{g_k\},\{h_k\})<\delta_1$ 时,

$$|\mu_G[g_{k_N}\cdots g_{k_1}(X)]-\mu_H[h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X)]|<m^{-N}\varepsilon$$

对所有有限序列 $(k_1,\cdots,k_N)\in\{1,\cdots,m\}$ 都成立. 于是, 对任意闭集 $Y\subset X$, 有

$$\mu_H(Y)\leqslant\sum\{\mu_H[h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X)]:h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X)\cap Y\neq\varnothing\}.$$

因

$$\{h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X):h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X)\cap Y\neq\varnothing\}$$

中所有元素的并集包含于集合 Y 的 $\frac{\delta}{2}$ 邻域, 故

$$\{g_{k_N}\cdots g_{k_1}(X):h_{k_N}\cdots h_{k_1}(X)\cap Y\neq\varnothing\}$$

中所有元素之并必然包含于 Y 的 δ 邻域 Y_δ, 从而

$$\mu_G(Y_\delta)\geqslant\mu_H(Y)-\varepsilon.$$

类似有

$$\mu_H(Y_\delta)\geqslant\mu_G(Y)-\varepsilon.$$

□

定理 2.8.3 设 $\{g_k\}\in\Phi,G$ 为其吸引子. 记 $H(\{g_k\})=H^{\dim_{\mathcal{H}}}(G)$, 则

$$H:(\Phi,\phi)\to R$$

是一致上半连续的, 从而是一致连续的 (参见附录 A).

证明 记 $\lambda>0$ 为 Φ 中所有迭代函数系所生成的吸引子 (即自相似集) 的维数的下确界, 并取定 $\eta=\frac{1}{2}\omega^n<1$. 对任意 $\varepsilon\in(0,\eta)$, 选取 $\delta_1\in\left(0,\frac{1}{6}\varepsilon\eta^2\right)$, 使得

(i) 对任意 $y,z\in[\omega,1]$ 和 $s,t\in[\lambda,n]$, 当

$$|y-z|<2\delta_1,\quad |s-t|<\delta_1$$

时, $|y^s-z^s|<\frac{1}{6}\eta\varepsilon$;

(ii) 对任意 $y \in [\eta, 1]$ 和 $z \in [\omega^n, 1]$, $\frac{z}{y-\delta_1} < \frac{z}{y} + \frac{1}{3}\varepsilon$ 总成立.

由引理 2.8.1, 可选取 $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, 使得, 对任意的 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi$ 及其吸引子 G, H 当 $\phi(\{g_k\}, \{h_k\}) < \delta_2$ 时, $|\dim_{\mathcal{H}}(G)| - \dim_{\mathcal{H}}(H)| < \delta_1$.

由引理 2.8.2, 可选取 $\delta \in (0, \delta_2)$, 使得对任意 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi$ 及其吸引子 G, H 上的自然质量分布 μ_G, μ_H, 当 $\phi(\{g_k\}, \{h_k\}) < \delta$ 时, 不等式 $\mu_G(U) \geqslant \mu_H(V) - \delta_1$ 对任意闭集 $V \subset X$ 及其 δ_2 邻域 U 都成立.

对前述 $\varepsilon > 0$, 取闭集 V, 使 $|V| \geqslant \omega$, 且

$$\frac{1}{\mu_H(V)}|V|^{\dim_{\mathcal{H}} H} < H^{\dim_{\mathcal{H}} H}(H) + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

这时

$$\mu_H(V) > \frac{1}{2}\omega^{\dim_{\mathcal{H}} H} \geqslant \eta,$$

于是

$$\begin{aligned} H^{\dim_{\mathcal{H}} G}(G) &\leqslant \frac{1}{\mu_G(U)}|U|^{\dim_{\mathcal{H}} G} < \frac{1}{\mu_H(V) - \delta_1}|V|^{\dim_{\mathcal{H}} H} + \frac{1}{3}\varepsilon \\ &< \frac{1}{\mu_H(V)}|V|^{\dim_{\mathcal{H}} H} + \frac{2}{3}\varepsilon < H^{\dim_{\mathcal{H}} H}(H) + \varepsilon, \end{aligned}$$

其中, 第二个不等号由 (i) 和 $\mu_H(V) - \delta_1 > \frac{1}{2}\eta$ 得到, 第三个不等号由 (ii) 得到.

综上所述, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 使得对任意 $\{g_k\}, \{h_k\} \in \Phi$ 及其吸引子 G, H, 当 $\phi(\{g_k\}), \{h_k\} < \delta$ 时

$$H^{\dim_{\mathcal{H}} G}(G) < H^{\dim_{\mathcal{H}} H}(H) + \varepsilon.$$

因此, 由 ε 的任意性, 映射

$$H : (\Phi, \phi) \to R$$

是连续的. □

上述定理有下述明显的推论.

推论 2.8.4　设 $\{g_k^{(n)}\}, \{g_k\} \in \Phi$, 且 $\{g_k^{(n)}\} \underset{\mathcal{H}}{\longrightarrow} \{g_k\}$, 则

$$H^{\dim_{\mathcal{H}} G^n}(G^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} H^{\dim_{\mathcal{H}} G}(G).$$

也就是满足强分离条件的自相似集合的序列, 如果收敛到一个满足强分离条件的自相似集, 则它们的 Hausdorff 测度也是收敛的. 但如果收敛到的自相似集不再满足强分离条件, 结果如何目前尚不得而知. 例如, 离散的 Sierpinski 垫片是在第一个层次下收敛到 Sierpinski 垫片 (维数收敛容易证明), 其相应测度是否也收敛, 目

前尚不清楚. 但文献 [13] 证明了一个满足强分离条件的离散的 Sierpinski 地毯收敛到不满足强分离条件的自相似集, 而其 Hausdorff 测度亦收敛. 下面证明一个用强分离条件在第一个层次意义下逼近开集条件的充分条件. 至于在第二个层次意义下用强分离条件逼近开集条件, 尚有待研究.

定理 2.8.5 有一个凸集作为恰当集的满足开集条件的自相似集可以由满足强分离条件的自相似集在第一层次意义下逼近, 且保持维数的连续性.

证明 设 $E \subset R^n$ 由相似压缩函数系

$$\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$$

生成, 其中 $S_k : D \to D$ 为相似压缩, 对应的相似比为

$$\{c_1, \cdots, c_m\}.$$

不妨假设 $D \subset R^n$ 且 $0 \in D$, 其中 $0 \in R^n$ 为原点 (可设 $D = \overline{V}$, 即为恰当集 V 的闭包).

设凸开集 V 为 E 的一个恰当集, 且

$$S_k(x) = c_{S_k} S_k(x) + x_{S_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

其中等号右端的 S_k 为对应压缩函数 S_k 的正交方阵. 这里 $S_k(0) = x_{S_k} \in D, k = 1, 2, \cdots, m$. 由假设 V 凸性, 易见

$$S'_{k,r}(x) = rc_{S_k} S_k(x) + x_{S_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \quad r \in (0, 1]$$

也是 D 上的相似压缩, 相似比为 $rc_{S_k}, k = 1, 2, \cdots, m, r \in (0, 1]$. 对每一个 $r \in (0, 1]$, 相似压缩函数系

$$\{S'_{1,r}, \cdots, S'_{k,r}\}$$

亦生成自相似集, 记为 E_r, 且易见 V 也是它的一个恰当集. 因此, 亦有 $E_r \subset \overline{V}$. 显然对 $0 < r_1 < r_2 \leqslant 1$, 有

$$S'_{k,r_1}(V) \subset S'_{k,r_2}(V) \subset S_k(V), \tag{2.8.2}$$

且当 $r \in (0, 1)$ 时,

$$\overline{S'_{k,r}(V)} \subset S_k(V). \tag{2.8.3}$$

由

$$S_k(V) \cap S_l(V) = \varnothing, \quad k \neq l$$

易见

$$S'_{k,r}(V) \cap S'_{l,r}(V) = \varnothing, \quad k \neq l,$$

即 E_r 满足开集条件.

下面证明, 对每一个 $r \in (0,1)$, E_r 满足强分离条件. 设

$$S'_{k,r}(E_r) \cap S'_{l,r}(E_r) \neq \varnothing, \quad k \neq l.$$

由 E_r 的压缩函数系并注意到 $0 < r < 1$, 易见

$$S'_{k,r}(E_r) \subset S'_{k,r}(\overline{V}) \subset S_k(V) \subset S_k(\overline{V})$$

和

$$S'_{l,r}(E_r) \subset S'_{l,r}(\overline{V}) \subset S_l(V) \subset S_l(\overline{V}).$$

因此

$$S'_{k,r}(E_r) \cap S'_{l,r}(E_r) \subset S_k(V) \cap S_l(V) = \varnothing,$$

矛盾, 即 E_r 满足强分离条件.

最后, 显然 $E_r \underset{\mathcal{H}}{\longrightarrow} E(r \to 1)$, 而且, 由定理 (2.8.2) 得

$$\dim_{\mathcal{H}}(E_r) \underset{r \to 1}{\longrightarrow} \dim_{\mathcal{H}}(E) \qquad \square$$

上面的证明严格依赖恰当集的凸性. 但这个条件不一定是必要的. 以后还会讨论这个问题.

第3章　上凸密度

上一章给出三个经典自相似集, 即 Sierpinski 垫片、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯 $C\times C$ 和 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度的估计. 正如我们所说的那样, 那是非常困难而又繁杂的工作, 而且人们是不可能通过改进精确度的办法而得到它们的准确值的, 进而, 即或得到一个很好的结果, 从直观上看很可能就是准确值, 也几乎没有办法去证明它! 本章将揭示其原因所在.

测度和密度密不可分, 一个测度对应一个密度. 所谓一个点的密度, 事实上就是包含这个点的集合的测度在某种意义下平均的极限 (有时可能不存在). 我们可以定义球密度, 亦可定义上凸密度, 前者与填充测度和中心测度的计算密切相关, 而后者正是 $\mathcal{H}$ 测度对应的密度, 因而与 $\mathcal{H}$ 测度计算有关. 本书重点是 $\mathcal{H}$ 测度, 因此本章重点是上凸密度. 上凸密度是回答前面提出的那些问题的关键.

3.1　球密度, 上凸密度

1. 球密度

下面总假设 $E\subset R^n$ 是一个 s 集, 即 $\dim_{\mathcal{H}}(E)=s$, $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$. 用 $B_r(x)$ 表示以 x 为中心以 $r>0$ 为半径的球, 因此 $|B_r(x)|=2r$. 定义

$$\overline{D}^s(E,x)=\varlimsup_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

$$\underline{D}^s(E,x)=\varliminf_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{(2r)^s}.$$

分别称为 E 在 x 处的上、下球密度, 当两者相等时, 称其公共值为球密度, 记为 $D^s(E,x)$. 这样的点称为正则点. 两者不等的点称为非正则点. E 称为正则的, 如果其 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的点是正则的; 而其 $\mathcal{H}^s$ 几乎所有的点都不是正则的, 则称其为非正则的.

关于球密度不作过多的讨论, 下面引述一个重要命题而不加证明[7].

命题 3.1.1　设 $E\subset R^n$ 是可测集, μ 是 R^n 上有限测度, $0<c<\infty$.

(1) 若对所有 $x\in E$, 极限 $\limsup\limits_{r\to 0}\mu(B(x,r))/r^2\leqslant c$, 则

$$\mathcal{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c.$$

(2) 若对所有 $x \in E$, 极限 $\limsup_{r\to 0} \mu(B(x,r))/r^2 \geqslant c$, 则

$$\mathcal{H}^s(E) \leqslant 2^s \mu(E)/c.$$

(3) 若对所有 $x \in E$, 极限 $\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))/r^2 \leqslant c$, 则

$$\mathcal{P}^s(E) \geqslant 2^s \mu(E)/c.$$

(4) 若对所有 $x \in E$, 极限 $\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))/r^2 \geqslant c$, 则

$$\mathcal{P}^s(E) \leqslant 2^s \mu(E)/c.$$

这个命题的重要性由下述事实可见一斑. 从 (1) 和 (2) 可以看出, 即使得到公共的 c, 也得不到 $\mathcal{H}$ 测度的准确值, 因为两个不等式中一个含有因子 2^s, 而另一个却不含. 但对填充测度而言, 却不存在这个问题. 只要得到公共的 c, 就可以得到填充测度的准确值. 这个命题为计算填充测度指出一条通路, 成为计算填充测度的有力工具. 一般而言, $\mathcal{H}$ 测度和填充测度的计算都是非常困难的, 但 $\mathcal{H}$ 测度的计算要比填充测度计算更困难: 填充测度计算可以说 "有路可循", 而 $\mathcal{H}$ 测度计算目前却 "无路可循". 例如, 在文献 [12] 中得到 $C \times C$ 的填充测度的准确值, 但是其 $\mathcal{H}$ 测度的准确值却至今没有得到. $\mathcal{H}$ 测度用凸覆盖定义, 而填充测度用球填充定义. 这种 "形状" 上的差别导致其计算上的困难差别. 下面将会看到, "凸集" 这个概念是 $\mathcal{H}$ 测度计算困难的症结所在, 从这个命题可以得到一些启迪. 关于这个命题的细节, 读者可以参考文献 [7].

2. 上凸密度

依然设 $E \subset R^n$ 是一个 s 集. 定义

$$\overline{D}_c^s(E,x) = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{0<|U_x|\leqslant r} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_x)}{|U_x|^s} \right\}, \tag{3.1.1}$$

这里 $x \in E$, U_x 是包含 x 的一个集合 (不要求它是 x 的邻域). 因为任何集合均包含在它的具有相同直径的凸闭包内, 显然, 这里的 U_x 可以取作凸集. 这个 $\overline{D}_c^s(E,x)$ 就称作 E 在 x 点的上凸密度. 它是 E 上的函数, 不难看出, 它还是可测函数. 但既不连续, 也不上半连续和下半连续. 如上面所说, 每一个测度对应一个密度. $\mathcal{H}$ 测度本质上是通过可数凸覆盖定义的, 上凸密度正是 $\mathcal{H}$ 测度所对应的密度, 因而它们之间有密切联系是很自然的. 下面给出一个定理, 说明这个概念在 $\mathcal{H}$ 测度研究和计算中的重要意义. 为了证明这个定理, 先证明一些有关测度性质的引理[5]. 下面设 E 是 s 集.

引理 3.1.2 设 $x \in E, x \in U_i, \forall i > 0, |U_i| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, 则

$$\overline{D}_c^s(E,x) \geqslant \limsup_{i\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_i)}{|U_i|^s}.$$

从定义直接可以看出, 证明从略.

引理 3.1.3 [5] (1) 对所有的 $r>0$, $\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))$ 是 x 的上半连续, 因而是可测函数;

(2) $\underline{D}^s(E,x)$, $\overline{D}^s(E,x)$ 是 x 的可测函数.

证明 (1) 给定 r, $\alpha>0$, 记

$$F = \{x : \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)) < \alpha\}.$$

设 $x\in F$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $B_{r+\varepsilon}$ 递降趋于 B_r, 据 $\mathcal{H}^s$ 的连续性, 得

$$\mathcal{H}^s(E\cap B_{r+\varepsilon}(x)) \to \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)).$$

因此可以找到 $\varepsilon>0$, 使得

$$\mathcal{H}^s(E\cap B_{r+\varepsilon}(x)) < \alpha,$$

因而, 如果 $|y-x|\leqslant\varepsilon$, 那么

$$B_r(y)\subset B_{r+\varepsilon}(x), \quad \mathcal{H}^s(E\cap B_r(y)) \leqslant \alpha.$$

因为 F 是开集, 这个结论对所有 α 均成立, 由此易见 $\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))$ 是 x 的上半连续函数.

(2) 由 (1) 知

$$\{x : \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s\}$$

是开集, 所以, 给定 $\rho>0$, 对 $r<\rho$,

$$F_\rho = \{x : \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s\}$$

这样的集合的并, 因而也是开集. 有

$$\{x : \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)) < \alpha\} = \bigcap_{\rho>0} F_\rho,$$

而当 ρ 递减时, F_ρ 递增, 可以在 ρ 可数个有理数值上取交, 所以 $\{x : \mathcal{H}^s(E\bigcap B_r(x)) < \alpha\}$ 是 G_δ 集, 因而对所有 α 是可测的, 从而 $\underline{D}^s(E,x)$ 是 x 的可测函数. 对 $\overline{D}^s(E,x)$, 类似结论成立. □

引理 3.1.4 [5] 对 s 集 $E \subset R^n$, $\overline{D}_c^s(E,x) = 0$ 对 $\mathcal{H}^s$-$x \notin E$ 几乎处处成立.

证明 固定 $\alpha > 0$, 证明可测集

$$F = \{x \notin E : \overline{D}_c^s(E,x) > \alpha\}$$

有零测度. 据 $\mathcal{H}^s$ 的正则性, 对给定的 $\delta > 0$, 存在闭子集 $E_1 \subset E$ 使得 $\mathcal{H}^s(E - E_1) < \delta$. 对 $\rho > 0$, 设 $\Omega = \{U\}$, 其中 U 是闭凸的, 且 $0 < |U| \leqslant \rho$, $U \cap E_1 = \varnothing$, $\mathcal{H}^s(E \cap U) > \alpha|U|^s$. 显然 Ω 是 F 的闭子集的 Vitali 类, 据 Vitali 覆盖定理, 在 Ω 中存在不相交序列 U_i, 使得 $\sum\limits_i |U_i|^s = 0$ 或 $\mathcal{H}(F - \bigcup\limits_i U_i) = 0$. 据 Ω 的定义,

$$\begin{aligned}\sum_i |U_i|^s &< \frac{1}{\alpha}\sum_i \mathcal{H}^s(E \cap U_i) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^s\left(E \cap \bigcup_i U_i\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^s(E - E_1) < \frac{\delta}{\alpha} < \infty,\end{aligned}$$

这是因为 U_i 是两两不相交的且每个元素均不与 E_1 相交, 由此得 $\mathcal{H}^s(F - \cup_i U_i) = 0$, 从而

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\rho^s(F) &\leqslant \mathcal{H}_\rho^s\left(F - \bigcup_i U_i\right) + \mathcal{H}_\rho^s\left(F \cap \bigcup_i U_i\right)\\ &\leqslant \mathcal{H}^s\left(F - \bigcup_i U_i\right) + \sum_i |U_i|^s < 0 + \frac{\delta}{\alpha}.\end{aligned}$$

这个结果对所有 $\delta > 0$, $\rho > 0$ 均成立, 因此 $\mathcal{H}^s(F) = 0$. □

定理 3.1.5 [5] *如果 $E \subset R^n$ 是 s 集, 那么 $\overline{D}_c^s(E,x) = 1$ 对 $\mathcal{H}^s$ 几乎处处 $x \in E$ 成立.*

证明 我们先证明 $\overline{D}_c^s(E,x) \geqslant 1$ 几乎处处成立. 注意, 下面总是用 U_x 表示包含 x 的凸集. 取 $\alpha < 1$, $\rho > 0$ 并设

$$F = \{x \in E : \mathcal{H}^s(E \cap U_x) < \alpha|U_x|^s, \forall |U_x| < \rho\}.$$

显然, 这是一个可测集. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 F 的由凸集构成的 ρ 可数覆盖 $\{U_i\}$, 使得

$$\sum_i |U_i|^s < \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon.$$

据 F 的定义, 易见

$$\mathcal{H}^s(F) \leqslant \sum_i \mathcal{H}^s(F \cap U_i) \leqslant \sum_i \mathcal{H}^s(E \cap U_i)$$

$$< \alpha \sum_i |U_i|^s < \alpha(\mathcal{H}^s(F) + \varepsilon).$$

因为 $\alpha < 1$, 最后的不等式对所有 $\varepsilon > 0$ 成立, 因此 $\mathcal{H}^s(F) = 0$. 因为对任意的 $\rho > 0$, 都可以定义这样的 F, 据定义, 对几乎所有的 $x \in E$, $\overline{D}_c^s(E, x) \geqslant \alpha$ 成立. 再据 $\alpha < 1$ 的任意性, 对几乎所有 $x \in E$, $\overline{D}_c^s(E, x) \geqslant 1$ 成立. 如果 E 是满足开集条件的自相似集, 因为有 $\overline{D}_c^s(E, x) \leqslant 1$. 定理证毕.

下面用 Vitali 方法证明相反方向的不等式. 给定 $\alpha > 0$, 设 $F = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) \geqslant \alpha\}$, 显然, 这是 E 的一个可测子集. 设 $F_0 = \{x \in F : \overline{D}_c^s(E - F, x) = 0\}$. 据引理 3.1.3, $\mathcal{H}^s(F - F_0) = 0$. 由上凸密度的定义, 如果 $x \in F_0$, 得

$$\overline{D}_c^s(F, x) \geqslant \overline{D}_c^s(E, x) - \overline{D}_c^s(F - F_0, x) > \alpha.$$

于是 $\Omega = \{U\}$ 是 F_0 的一个 Vitali 族, 其中 U 是闭凸的, 且 $\mathcal{H}^s(F \cap U) > \alpha |U|^s$, 所以据 Vitali 覆盖定理, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Omega = \{U\}$ 的不相交序列 U_i 使得 $\mathcal{H}^s(F_0) \leqslant \sum\limits_i |U_0|^s + \varepsilon$. 据 $\Omega = \{U\}$ 的性质,

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_0) < \frac{1}{\alpha} \sum_i \mathcal{H}^s(F \cap U_i) + \varepsilon \leqslant \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon.$$

这个不等式对任意 $\varepsilon > 0$ 成立, 所以当 $\alpha > 0$ 时, $\mathcal{H}^s(F) = 0$. 这明显蕴涵 $\overline{D}_c^s(E, x) \leqslant 1$ 对 $\mathcal{H}^s$ 几乎处处成立. □

有关上述定理, 建议读者参考文献 [5]. 对一般的 s 集, 这个定理的意义不是很明显, 但对满足开集条件的自相似集却意义重大. 它事实上孕育了一个新的研究领域: 自相似集的结构. 我们在本书前言中曾说, 上凸密度是本书的概念源头, 正是基于这个事实. 事实上, 本书所建立的满足开集条件的自相似集测度研究和计算的理论正是从这个定理得到的启发而形成的. 从自相似集的定义容易看出, 自相似集的大模样是非常清楚的, 它们具有典型的分形特征, 即由与整体几何相似的有限个部分组成 (对每一个正整数均如此), 并涉及一个无限生成过程, 但是其微结构或内部结构却完全不清楚. 也正如我们在前言所说那样, 它如同天体的 "黑洞", 仅从自相似集的定义, 人们看不到有关它的任何曙光. 正是上凸密度这个概念, 为人们撬开了这个 "黑洞" 的一条门缝, 使人们得窥自相似集内部结构的奥秘, 发现那是一个崭新的研究天地, 而诸如 $\mathcal{H}$ 测度计算等的困难症结正蕴含其中. 如果说经典的微分几何学研究的是宏观的宇宙学, 那么近代的分形几何学研究的就是微观的原子学, 而对原子学, 没有什么概念比微结构 (原子结构) 更重要的了. 上凸密度的概念正是研究微结构的至今为止唯一的工具: 每一点都有一个上凸密度 (实数值), 从上凸密度的定义不难看出, 具有不同上凸密度的点自然有不同的微结构, 具有相同上

凸密度的点是否一定有相同的微结构? 点的微结构如何影响分形的整体结构? 反过来, 分形的整体结构又如何制约其中点的微结构? $\mathcal{H}$ 测度计算如此困难是否与微结构有关? 例如, $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的情形, 人们还可以计算出某些 $\mathcal{H}$ 测度, 而 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 的情形, 却至今一个也计算不出 (这里均指满足开集条件的自相似集, 有些非自相似集当维数大于 1 时其 $\mathcal{H}$ 测度是可以计算的, 本书不予考虑), 是否两者在点的微结构上有什么重大不同 (关于微结构, 下面还要讨论)? 等等, 这些至今人们完全不清楚! 这些问题下面还要提到, 事实上, 本书下面的讨论将是围绕上凸密度这个概念而展开的.

3.2　上凸密度的性质, 最好覆盖和最好形状

设 $E \subset R^n$ 是满足开集条件的自相似集, 其相似函数压缩系为 $\{S_1, \cdots, S_m\}$, $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$.

上凸密度有下述性质和简单事实:

(1) $\overline{D}_c^s(E, x) \leqslant 1, \forall x \in E$. 这由部分估计原理, 即 $\mathcal{H}^s(E \cap U) \leqslant |U|^s$ 很容易看出.

(2) 上凸密度是相似变换的不变量. 设 F 是任意分形, 用 $\lambda F (\lambda > 0)$ 表示对 F 的相似缩放 (即作用一个相似变换, 相似比为 λ), 据比例缩放性质, 有 $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$, 其中 $s = \dim_{\mathcal{H}}(F)$. 因此, 对任意子集 $U \subset R^n$, 都有

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap U)}{|F \cap U|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(\lambda(F \cap U))}{|\lambda(F \cap U)^s|} = \frac{\lambda^s(\mathcal{H}^s(F \cap U))}{\lambda^s|F \cap U|^s},$$

即对任意 $U \subset R^n$, $\dfrac{\mathcal{H}^s(F \cap U)}{|F \cap U|^s}$ 都是相似变换的不变量.

(3) 设 $x \in E$, 则 $\overline{D}_c^s(E, x) \leqslant \overline{D}_c^s(E, S_i(x)), i = 1, \cdots, m$. 这是因为, 如果 $x \in U_j$, $\forall j > 0$, $|U_j| > 0$, $\forall j > 0$, 那么 $S_i(x) \in S_i(U_j)$, $|S_i(U_j)| > 0$, $\forall j > 0$. 由比例缩放性质, 易见

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_j)}{|U_j|} = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap S_j(U_j))}{|S_j(U_j)|}.$$

由上凸密度的定义即得

$$\overline{D}_c^s(E, x) \leqslant \overline{D}_c^s(E, S_i(x)), \quad i = 1, \cdots, m.$$

例如, Sierpinski 垫片边上中间那个点是三角形一个顶点的相似压缩象 (参见图 1.1.2), 因此有不小于顶点的上凸密度. 另外, Koch 曲线中间的顶点也有不小于端点的上凸密度, 但它不是端点的相似压缩象, 这要从定义去证明 (参见图 1.1.3). 这两个问题以后还要讨论.

(4) 设 $x \in S_i(E), i = 1, \cdots, m$, 则

$$\overline{D}_c^s(E, x) \geqslant \overline{D}_c^s(E, S_i^{-1}(x)), \quad i = 1, \cdots, m.$$

用 S_i^{-1} 作用点 x 和 U_j, 据上凸密度在相似变换下不变的性质, 由 (3) 中的不等式即得所需结论.

下面引进几个术语.

(1) 如果存在 E 的覆盖 $\{U_i, i > 0\}$ 使得

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum_i |U_i|^s, \tag{3.2.1}$$

就称 $\{U_i, i > 0\}$ 是 E 的一个最好覆盖. E 显然是它本身的一个覆盖, 称之为 E 的自然覆盖. 显然 $\mathcal{H}^s(E) = |E|^s$ 当且仅当 E 是它自身的最好覆盖.

(2) 如果集合族 $\{U_i, i > 0\}$ 满足

$$\mathcal{H}^s\left(E - \bigcup_i U_i\right) = 0, \tag{3.2.2}$$

就称 $\{U_i, i > 0\}$ 是 E 的一个几乎处处覆盖. 如果还满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \mathcal{H}^s(E),$$

则称 $\{U_i, i > 0\}$ 是 E 的一个几乎处处最好覆盖.

(3) 设 $x \in E$, 如果存在 U, $x \in U$, $|U| > 0$ 使得

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s}, \tag{3.2.3}$$

就称 U 是 x 的一个最好形状.

(4) 如果 U, $|U| > 0$ 满足

$$\mathcal{H}^s(E \cap U) = |U|^s, \tag{3.2.4}$$

那么称 U 是 E 的一个最好形状.

令 $E_1 = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) = 1\}$, 据定理 3.1.5, E_1 是一个可测集, 且 $\mathcal{H}^s(E_1) = \mathcal{H}^s(E)$. 存在两种情况, 或 $E - E_1 = \varnothing$, 或 $E - E_1 \neq \varnothing$. 无论在哪种情况, $E - E_1$ 都是 (关于 $\mathcal{H}^s$ 的)"小" 集合, 但这个 "小" 集合在后面的讨论中却起大作用. 在一般测度论中, 一个零测集可以忽略不计而对于这个相应测度的讨论无重要影响, 但在这里情况却迥异, 两种情况的不同对自相似集的结构有重大影响, 而且与 $\mathcal{H}$ 测度

的计算困难有密切关系. $E - E_1 \neq \varnothing$, 就是要判断 E 的某个特殊点具有上凸密度小于 1. 对维数 $\mathcal{H}$ 大于 1 的情况, 这不是一个简单问题. 下面证明 Sierpinski 垫片的顶点有上凸密度小于 1.

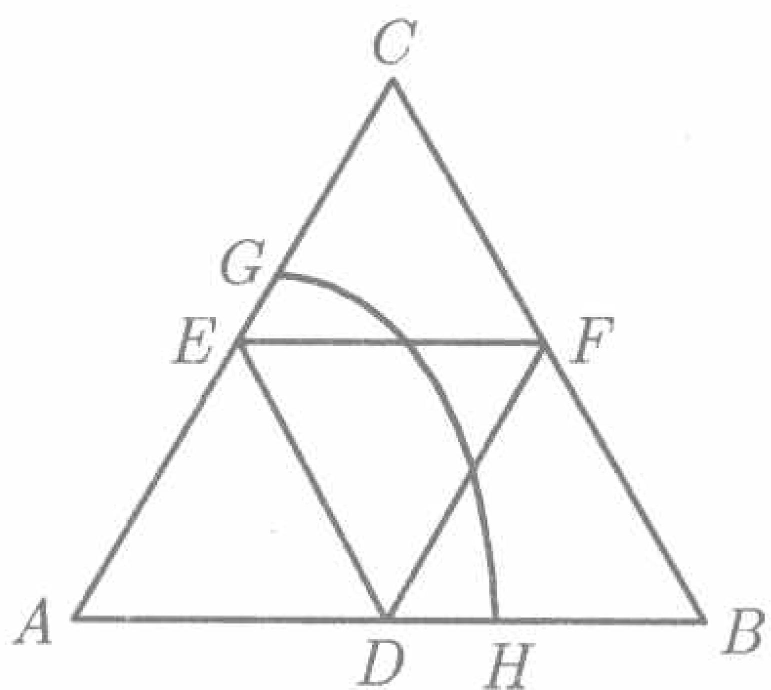


图 3.2.1　Sierpinski 垫片顶点的最好形状

命题 3.2.1　如图 3.2.1 所示, 在正三角形 $\triangle ABC$ 上生成 Sierpinski 垫片 S, $\dim_{\mathcal{H}}(S) = \log 3/\log 2$. 则 $\overline{D}_c^s(S, A) < 1$.

证明　因为正三角形的三个角都是 $60°$, 易于证明, 对给定的长度 $|AG|$, 以顶点 A 为圆心以 $|AG|$ 为半径所得到的扇形 $A\widehat{GH}$(参见图 3.2.1) 包含的 $\mathcal{H}^s$ 测度最大, 即

$$\mathcal{H}^s(S\cap(A\widehat{GH}))=\sup\{\mathcal{H}^s(S\cap U) : |U|=|AG|, A\in\cup\}.$$

设 S_1, S_2, S_3 是生成 Sierpinski 垫片的三个相似压缩, 其中 S_1 是把正三角形 $\triangle ABC$ 映到以 A 为顶点的那个 1 拷贝的相似压缩. 对每一个 $i > 0$, 存在以 A 为顶点的扇形 U_i, 使得

$$\frac{\mathcal{H}^s(S \cap U_i)}{|U_i|^s} \geqslant \overline{D}_c^s(S, A) - \frac{1}{i},$$

并且根据上凸密度是相似变换不变量的性质, 必要时, 用 S_1^{-1} 加以作用, 总可以假设其半径不小于 $\frac{1}{2}$. 于是得到扇形序列 U_i, $i > 0$. 设 $U_i \underset{\mathcal{H}}{\longrightarrow} U$, 显然

$$|U| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \overline{D}_c^s(S, A) = \frac{\mathcal{H}^s(S \cap U)}{|U|^s}.$$

定义连续函数 $f : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to R$:

$$f(r) = \frac{\mathcal{H}^s(S \cap U)}{\mathcal{H}^s(S)} \times \frac{1}{|U|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(S \cap U)}{\mathcal{H}^s(S)} \times \frac{1}{r^s},$$

其中 $r = |U|$. 设 f 在 r_0 处达到极大值. 记对应 r_0 的扇形为 U_{r_0}. 易见

$$\overline{D}_c^s(S, A) = \frac{\mathcal{H}^s(S \cap U_{r_0})}{|U_{r_0}|^s}.$$

设 U_{r_0} 包含 i 拷贝的个数为 N_i, $i > 0$(不重复计算), 每个 i 拷贝的测度是 $\frac{1}{3^i}\mathcal{H}^s(S)$, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(S \cap U_{r_0})}{|U_{r_0}|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(S)}{|U_{r_0}|^s} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}. \tag{3.2.5}$$

在理论上, r_0 是可以计算的并且可以得到较好精确度. 通过编程计算 (过程从略), 得到

$$r_0 \approx 0.9130, \quad f(r_0) \approx 1.0684.$$

下面证明 $S \neq \{x \in S : \overline{D}_c^s(S,x) = 1\}$. 如果不然, 即 S 的每一点都有上凸密度 1, 则有

$$\frac{\mathcal{H}^s(S \cap U_{r_0})}{|U_{r_0}|^s} = 1,$$

故

$$\mathcal{H}^s(S) = \frac{1}{f(r_0)} \approx 0.9360.$$

这与定理 2.5.1 矛盾. 这就证明了 Sierpinski 垫片的顶点有上凸密度小于 1. □

利用上面的事实可知, Sierpinski 垫片边上中点的上凸密度不小于顶点的上凸密度, 即

$$\overline{D}_c^s(S,E) \geqslant \overline{D}_c^s(S,A), \tag{3.2.6}$$

其中不等号严格成立还是等号成立至今未决.

上述证明完全决定了 Siepinski 垫片顶点的最好形状, 这是因为正三角形的三个角都是 60°. 一般地, 在多边形上生成的自相似集中, 当它的某一个角不大于 60° 时, 这个角的顶点处的最好形状就可以决定, 即是以该顶点为圆心的扇形, 而大于 60° 的角的顶点处的最好形状, 则一般还无法决定. 所以 Koch 曲线的两个端点处的最好形状亦可决定, 且亦有上凸密度小于 1, 但其上面那个顶点的上凸密度却也至今未决[42]. 不能决定最好形状的点的上凸密度就不容易判断其上凸密度是否等于 1. 例如, $C \times C$ 由正方形生成, 每个角均是 90°, 顶点处的最好形状的存在性易于证明, 但目前尚不能完全决定, 因而至今不能决定其上凸密度是否等于 1. 这个问题以后还会涉及.

3.3 上凸密度的计算与估计

上凸密度概念开辟了一个新的研究领域, 即计算与估计点的上凸密度, 这个问题与 $\mathcal{H}$ 测度的计算与估计有密切关系, 在一定意义下两者等价. 下面以 Sierpinski 垫片为例说明这个问题.

命题 3.3.1 *设 S 为 Sierpinski 垫片 (参见图 3.2.1), $\dim_{\mathcal{H}}(S) = \log 3/\log 2$, 则 $\overline{D}_c^s(S,A)$ 与计算出 $\mathcal{H}^s(S)$ 等价.*

证明 设顶点 A 处的最好形状为 U, 并设其上凸密度已计算出, 即

$$\overline{D}_c^s(S,A) = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = x,$$

即 $\mathcal{H}^s(S\cap U)=x|U|^s$. 通过对 U 进行各级 i 拷贝填充 (类似后面定理 3.4.13), 可得

$$\mathcal{H}^s(S\cap U)=\mathcal{H}^s(S)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{3^i}=x|U|^s,$$

其中的级数是可计算的, $|U|$ 亦可计算, 故 $\mathcal{H}^s(S)$ 可计算. 反过来, 如 $\mathcal{H}^s(S)$ 已知, 则 $\overline{D}_c^s(S,A)=x$ 亦可计算. □

一般说来, 一个凸闭包是多边形的自相似集 E, 其中不大于 60° 的角的顶点的上凸密度的计算与 $\mathcal{H}^s(E)$ 的计算等价. 这里要求角不大于 60°, 因为这时该顶点处的最好形状可以完全被决定. 如果只知道上凸密度的值而不能决定最好形状, 结论不成立. 所以完全决定最好形状是重要的.

在命题 3.2.1 的证明中利用了对 Sierpinski 垫片的 $\mathcal{H}$ 测度的估计. 那里只是证明其顶点有上凸密度小于 1, 没有给出更好的上限估计. 在理论上估计更好的上限是可能的, 但要做大量的计算, 下面给出另一个同类的结果, 不再用相应的 $\mathcal{H}$ 测度的估计, 而是只用到上凸密度的基本性质, 并且得到较好的上限.

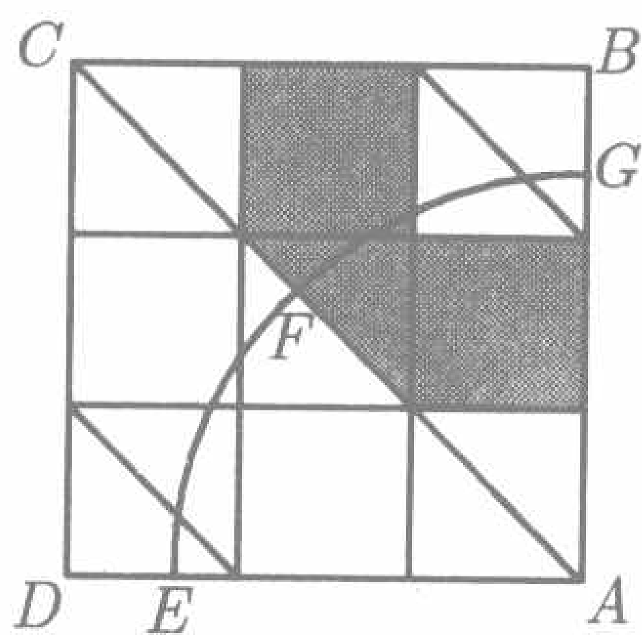


图 3.3.1　单位等腰直角三角形上的自相似集

在单位等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 上, 由 4 个压缩比均为 $\frac{1}{3}$ 的相似压缩函数生成自相似集 (如图 3.3.1 所示, 其中阴影部分是挖去的部分). 为方便起见, 记作 $\frac{1}{2}C\times C$, 因为它可以看作是 $C\times C$ 的一半. 注意, 后者满足强分离条件, 但前者只满足开集条件. 显然, 两者有相同的 $\mathcal{H}$ 维数, 即 $\dim_{\mathcal{H}}=\log 4/\log 3$. A 同时是 $C\times C$ 和 $\frac{1}{2}C\times C$ 的顶点. 因此它有两个上凸密度, 即 $\overline{D}_c^s(C\times C,A)$, $\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}C\times C,A\right)$.

命题 3.3.2　$\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}C\times C,A\right)\leqslant\frac{\sqrt{2^s}}{2}<0.77428133.$

证明　因为 $\angle CAB=45°$, 所以作为 $\frac{1}{2}C\times C$ 的顶点, A 处存在最好形状扇形 $\widehat{AFG}$, 即

$$\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}C\times C,A\right)=\frac{\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{2}(C\times C)\cap\widehat{AFG}\right)}{|AF|^s}.$$

取 $\widehat{AFG}$ 关于对角线 AC 的对称图形, 得到扇形 $\widehat{AEFG}$. 由上凸密度的定义和对称性易见, 有

$$1\geqslant\overline{D}_c^s(C\times C,A)\geqslant\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap\widehat{AEFG})}{|EG|^s}$$

$$= \frac{2\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{2}(C\times C)\cap \widehat{AFG}\right)}{\sqrt{2^s}|AF|^s}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2^s}}\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}C\times C, A\right)$$

(第二个等号易由上凸密度的定义直接证明), 这里 $s = \log 4/\log 3 = 1.261859507\cdots$, 通过计算得到

$$\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}C\times C, A\right) \leqslant \frac{\sqrt{2^s}}{2} < 0.77428133. \qquad \square$$

这里留下一个问题, 即

$$\overline{D_c^s}\left(\frac{1}{2}C\times C, B\right) > \overline{D_c^s}\left(\frac{1}{2}C\times C, A\right)$$

是否成立? 前者不小于后者是明显的. 另外, 容易证明

$$\overline{D_c^s}(C\times C, B) = \overline{D_c^s}\left(\frac{1}{2}C\times C, B\right).$$

这是因为作为 $C\times C$ 的顶点 B 和作为 $\frac{1}{2}C\times C$ 的顶点 B 有相同的微结构 (参见第 4 章).

上面讨论的等腰直角三角形上生成的自相似集是 $C\times C$ $\left(\text{即 } \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right.$-Sierpinski 地毯$\left.\right)$ 的一半. 根据同样的技巧, 可以得到对应另一个 Sierpinski 地毯的一半的相应结果.

把单位正方形每边三等分, 连接对应分点, 把单位正方形分成 9 个相同的小正方形, 去掉中间一个小正方形的内部, 得到由 8 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的小正方形构成的集合. 对每个小正方形重复上述过程, 并无限进行下去, 最后得到的极限集合是一个满足开集条件的自相似集. 这就是所谓另一个 Sierpinski 地毯, 或称作 $\frac{8}{9}$-Sierpinski 地毯. 亦用 S 表示 (见图 3.3.2). 易知

$$\dim_{\mathcal{H}}(S) = \log 8/\log 3 < 1.8928.$$

在等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 上生成自相似集 (如图 3.3.2 斜对角线上面半个三角形所示), 为方便起见, 用 $\frac{1}{2}S$ 表示. 这时, 点 A 同时是 S 和 $\frac{1}{2}S$ 的顶点. 利用上述命题的证明方法, 可得

$$\overline{D}_c^s\left(\frac{1}{2}S, A\right) \leqslant \frac{\sqrt{2^s}}{2} < 0.72112.$$

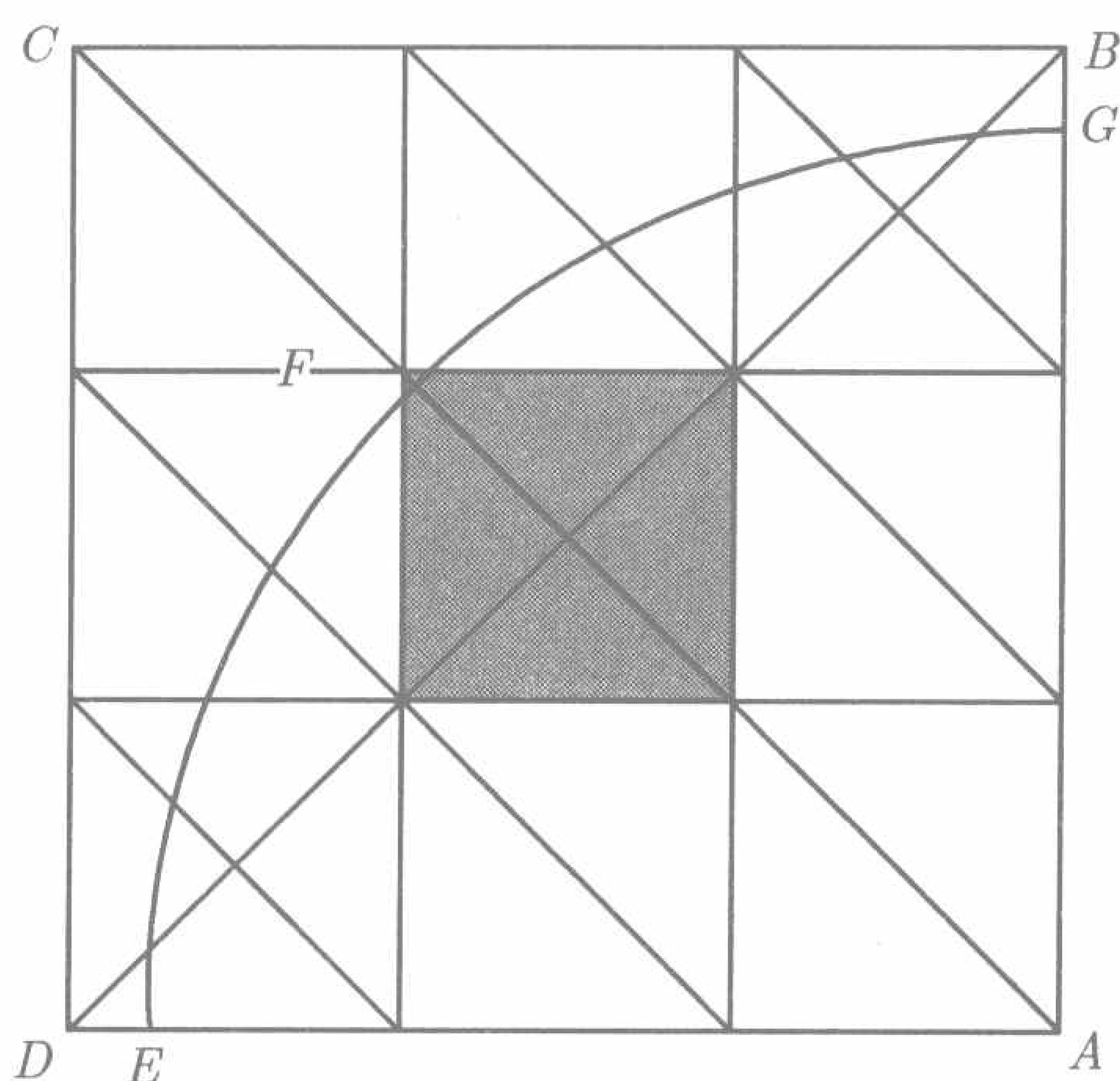


图 3.3.2　$\frac{8}{9}$-Sierpinski 地毯

这里同样留下一个问题, 即

$$\overline{D_c^s}(S,B) > \overline{D_c^s}\left(\frac{1}{2}S,A\right)$$

是否成立? 同样前者不小于后者是明显的. 另外, 也容易证明

$$\overline{D_c^s}(S,B) = \overline{D_c^s}\left(\frac{1}{2}S,B\right).$$

同样因为作为 S 的顶点 B 和作为 $\frac{1}{2}S$ 的顶点 B 有相同的微结构 (亦见第 4 章).

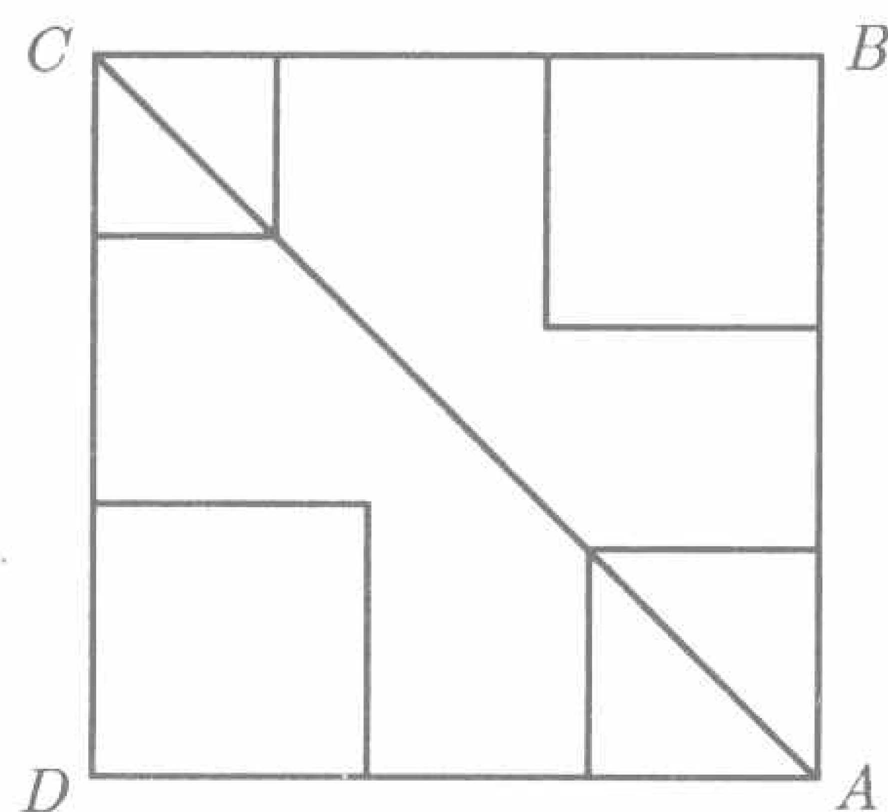


图 3.3.3　一般情况

注 3.3.3　上述方法原则上适用下述情况: 把正方形由一条对角线分成对称的两个等腰直角三角形, 在其中一个上生成满足开集条件的自相似集 (参见图 3.3.3), 然后取其关于该对角线的对称图形, 使这两个自相似集一起构成单位正方形上一个自相似集, 即某个 Sierpinski 地毯. 这时该对角线上的顶点作为由单位等腰直角三角形所生成的自相似集的顶点, 其上凸密度就可以得到较好上限估计. 上面两例子的压缩比都是相同的, 但这里压缩比可以不同. 例如图 3.3.3 所示的情形.

注 3.3.4　正如我们说过的那样, 上凸密度概念孕育了一个新的研究领域, 即自相似集的结构, 其详细讨论留待下一章. 我们的一个重要猜想是: 对一个满足开集条件的自相似集 E, 当其 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 时, 总有 $E_1 \not\subset E$, 即至少有一个点有上

凸密度小于 1. 我们用直接的方法证明, Sierpinski 垫片和 Koch 曲线支持这个猜想, 上面又得到一系列支持的例子. 但这些都是很特殊的例子, 例如, 所涉及的自相似集的凸闭包都是多边形, 而且至少有一个角不大于 60°, 离判断这个猜想正确与否还相去甚远. 在能够得到完全解决的答案之前, 我们希望尽可能多的例子支持它. 当然, 如果发现一个例子不支持它, 这个猜想就被否定, 问题也解决了. 但我们倾向它成立. 支持它成立的例子越多越好, 因为我们希望可以从中得到某些一般性的启发.

3.4 上凸密度与 $\mathcal{H}$ 测度计算

本节的目的是通过上凸密度的概念, 建立满足开集条件的自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度计算的理论框架. 我们说建立 "理论框架", 那是因为我们的结果还不能真正用于具体计算. 为什么呢? 另外, 前面我们说过, 用 "部分估计原理", 通过估计上、下限的方法很难得到 $\mathcal{H}$ 测度的精确结果, 因为即使我们得到一个非常好的结果, 从直观上很像精确值, 也很难加以证明. 为什么? 这里留下两个 "为什么". 在本节最后给出适当解释. 本节的主要结果是下面的定理.

定理 3.4.1 设 $E \subset R^n$, $n > 0$ 是满足开集条件的自相似集, $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$. 则存在 $U \subset R^n$, $|U| > 0$, 满足

$$\mathcal{H}^s(E \cap U) = |U|^s.$$

我们知道 $\mathcal{H}^s(E \cap U) \leqslant |U|^s$ 总是成立的, 上面结果即是说, 这个集合方程存在非平凡等式解. 为了证明这个结果, 我们要作一系列准备.

设 E 由相似压缩函数系和相应相似压缩比

$$\{S_i, i = 1, 2, \cdots, m, m > 1\}; \quad \{0 < c_i < 1, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

生成. 一个恰当开集记为 V.

设 $S = \{1, 2, \cdots, m\}$ 为由 m 个符号构成的状态空间, 并记

$$\Sigma_m = \{i = (i_1 i_2 \cdots) : i_n \in S, \forall n > 0\}$$

为 S 上单边符号空间. 设

$$\begin{cases} \sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m, \\ \sigma((i_0 i_1 i_2 \cdots)) = ((i_1 i_2 \cdots)), \quad \forall i = (i_1 i_2 \cdots) \in \Sigma_m, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

即 σ 为 Σ_m 上转移自映射. 用 J_k 表示所有 S 上 k 序列的集合, 有

$$\begin{aligned} E_{i_1\cdots i_k} &= S_{i_1}\cdots S_{i_k}(E), \quad \forall (i_1\cdots i_k)\in J_k; \\ E_{i_1 i_2\cdots} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i_1\cdots i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(E) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\overline{V}) = \{x_i\}, \quad \forall i = (i_1 i_2\cdots)\in \Sigma_m. \end{aligned}$$

即 $E_{i_1 i_2\cdots}$ 是一个单点集 $\{x_i\}$, 称 $i=(i_1 i_2\cdots)$ 是 $\{x_i\}$ 的一个表示. 显然, E 中每一点都有表示, 但未必唯一. 称 $S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\overline{V})$ 为 $\overline{V}$ 的一个 k 拷贝, $\forall (i_1\cdots i_k)\in J_k$, $k>0$. 如果 x_i 是所有 k 拷贝 $S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\overline{V})$ 的内点, 就称 x_i 是 E 的一个内点. 易见, E 的每一个内点有唯一的表示.

考虑连续映射

$$\begin{cases} \zeta : \Sigma_m \to E, \\ \zeta(i) \mapsto \{x_i\}, \quad \forall i = (i_1 i_2\cdots)\in \Sigma_m. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

如果 E 满足强分离条件, 这个映射是 1 对 1 的, 但如果 E 仅满足开集合条件, 则是多对 1 的.

下面总是假设 $\mathcal{H}^s(\partial E)=0$, 这里 ∂E 表示 E 的边界. 这个假设并不苛刻, 因为除退化情形外, 这个条件总是满足的. 由上述假设易见, 有

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1\cdots i_k)\in J_k} S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\partial E)\right)=0,$$

因此, 所有 E 的内点构成 $\mathcal{H}^s$ 的一个满测度集合. 我们需要下面的简单结论.

命题 3.4.2　如果 $x_i=\zeta(i_1 i_2\cdots)$ 是 E 的内点, 则存在 $k>0$ 使得

$$S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\overline{V})\subset V.$$

据定理 3.1.4, 存在 E 的内点 x 使得 $\overline{D}_c^s(E,x)=1$.

我们需要一些关于 Hausdorff 度量和有关测度的知识. 记 $\mathcal{C}$ 为 R^n 的全体紧致子集构成的集合族. 在 $\mathcal{C}$ 上定义距离如下:

$$\rho(A,B)=\inf\{\delta:\overline{V(A,\delta)}\supset B,\ \overline{V(B,\delta)}\supset A\},$$

其中 $V(A,\delta)=\{x\in R^n: d(A,x)<\delta\}$. 可以证明, ρ 是 $\mathcal{C}$ 上一个完备度量, 叫做 $\mathcal{C}$ 上的 Hausdorff 度量 (参见附录 A). 因此, 有

定理 3.4.3 (Blaschke 选择定理)[5] *$\mathcal{C}$ 上任何一致有界无穷集合有收敛的子序列.*

设 $\{F_i, i>0\}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的子序列. 用 $F_i \xrightarrow{\mathcal{H}} F$ 表示在 Hausdorff 度量意义下 $\{F_i, i>0\}$ 收敛到 F. 易见, 若 $F_i \xrightarrow{\mathcal{H}} F$, 则 $|F_i| \to |F|$, 进而, 若 $x \in F_i, \forall i>0$, 则 $x \in F$.

命题 3.4.4 *设 m 是 R^n 的一个具有紧支撑的有限测度, 则*

$$F_i \xrightarrow{\mathcal{H}} F \Rightarrow \limsup_{i\to\infty} m(F_i) \leqslant m(F).$$

证明 对任意的 $r>0$, 据 Hausdorff 度量的定义, 对充分大的 i, 有 $F_i \subset V(F,r)$. 所以 $m(F_i) \leqslant m(V(F,r))$. 据假设 m 是正则的[24], 所以 $\lim_{r\to 0} m(V(F,r)) = m(F)$. 由此易证

$$\limsup_{i\to\infty} m(F_i) \leqslant m(F).$$ □

对任意的 $\varepsilon>0$, 记

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \left\{U \subset R^n : \frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s} \geqslant 1-\varepsilon\right\}.$$

据定理 3.1.4, 存在上凸密度为 1 的点, 因而 $\mathcal{B}_\varepsilon \neq \varnothing$.

命题 3.4.5 *存在 $F \in \mathcal{C}$, 使得 $|F| = \sup\{|U| : U \in \mathcal{B}_\varepsilon\}$, 且*

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap F)}{|F|^s} \geqslant 1-\varepsilon.$$

证明 设 $b = \sup\{|U| : U \in \mathcal{B}_\varepsilon\}$. 对每一个 $l>0$, 存在 $F_l \in \mathcal{C}$, 满足

$$|F_l| > b - \frac{1}{l}, \quad \frac{\mathcal{H}^s(E\cap F_l)}{|F_l|^s} \geqslant 1-\varepsilon.$$

显然, $\{F_l\}$ 是一致有界的, 必要时取子序列, 可设当 $l\to\infty$ 时, $F_l \xrightarrow{\mathcal{H}} F$, 这样

$$|F| = \lim_{l\to\infty} |F_l| = b,$$

且据命题 3.4.4,

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap F_l)}{|F_l|^s} \leqslant \frac{\mathcal{H}^s(E\cap F)}{|F|^s},$$

因此

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap F)}{|F|^s} \geqslant 1-\varepsilon.$$ □

设 V 为一个恰当集. 定义一系列相似放大如下:

x 为 E 的内点, 使得 $\overline{D}_c^s(E,x)=1$, 并记 $i=(i_1i_2\cdots)$ 是它的表示. 元素 $(j_1j_2\cdots j_p)\in J_p$, $p>0$ 叫做 x 的 p 串, 如果存在 $m>0$, 使得 $j_1=i_{m+1},\cdots,j_p=i_{m+p}$.

对 $p>0$, 易见

$$(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}:S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V})\to\overline{V}$$

是从 $S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V})$ 到 $\overline{V}$ 上的相似放大, 放大比为 $1/(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_p})$ 且

$$(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}(S_{i_1}\cdots S_{i_p}(E))=E.$$

定义一个相似放大

$$T_p:\overline{V}\to R^n$$

使得 T_p 在 $S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V})$ 上的限制与 $(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}$ 重合, 或者 T_p 是 $(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}$ 从 $S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V})$ 到 $\overline{V}$ 上的线性扩充. 于是, 得到一系列相似放大:

$$\begin{cases}T_p:\overline{V}\to R^n,\\ T_p(y)=(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}(y),\quad \forall y\in S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V}),\\ T_p(S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V}))=(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}(S_{i_1}\cdots S_{i_p}(\overline{V}))=\overline{V}.\end{cases}\tag{3.4.3}$$

为了方便, 有时记 $T_p=(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}$ 和 $(T_p)^{-1}=S_{i_1}\cdots S_{i_p}$. 从上述定义易见, 有

$$T_p(x)=(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}(x)\in E\subset\overline{V}\subset T_p(\overline{V}),$$

且 $T_p(x)$ 总是 E 的内点. 称 $T_p(\overline{V})$ 是 $\overline{V}$ 的一个 p 放大.

命题 3.4.6 任意整数 $h>0$ 和 $p>0$,

$$T_p(\overline{V})\cap T_{p+h}(\overline{V})=T_p(\overline{V})\Leftrightarrow(i_1i_2\cdots i_p)=(i_{1+h}i_{2+h}\cdots i_{p+h}),$$

且对任意 $i_1\in\{1,2,\cdots,m\}$, $(S_{i_2}\cdots S_{i_p})^{-1}(\overline{V})\subset(S_{i_1}\cdots S_{i_p})^{-1}(\overline{V})$.

证明从略.

下面总是假设 $x\in E$ 是内点有 $\overline{D}_c^s(E,x)=1$, 且其表示为 $(i_1i_2\cdots)$. 用 $(i_1i_2\cdots)$ 定义 T_p 如上, $p>0$. 注意, $T_p(E)$ 也是满足开集条件的自相似集且

$$\dim_{\mathcal{H}}(E)=\dim_{\mathcal{H}}(T_p(E)),\quad \forall p>0,$$

但

$$\mathcal{H}^s(T_p(E))=(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_p})^s\mathcal{H}^s(E).$$

引理 3.4.7 设 $U\subset R^n$. 对任意 $0<i,j\leqslant m$, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(S_i(E\cap U))}{|S_i(U)|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(S_i^{-1}(E\cap U))}{|S_i^{-1}(U)|^s}.$$

上述等式显然对 S_i, $(S_i)^{-1}$ 的任意复合亦成立.

利用缩放比例性质证明, 从略.

引理 3.4.8 设 $F\subset R^n$ 为紧子集, 则存在最小的整数 $q>0$ 使得 $F\subset \text{int}\ T_q(\overline{V})$, 这里 int $(T_q(\overline{V}))$ 表示 $T_p(\overline{V})$ 的内集, 即为 $T_q(V)$.

证明 因为 $x\in E\subset\overline{V}$ 为内点, 存在 $\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)\subset \text{int}\ (\overline{V})$, 这里 $B(x,\delta)$ 是 x 的半径为 δ 的开球. 因此 $T_q(B(x,\delta))\subset \text{int}\ T_q(\overline{V})$. 注意到, 当 $q\to\infty$ 时,

$$|T_q(B(x,\delta))|=2\delta/(c_{i_1}\cdots c_{i_q})\to\infty,$$

且 $T_q(x)\in E,\forall q>0$ 和 $\overline{V}$ 是有界的, 显然, 有界集合

$$F\subset T_q(B(x,\delta))\subset \text{int}\ T_q(\overline{V})$$

成立, 只要 q 充分大. □

定理 3.4.1 的证明 对每一个 $k>0$, 记紧致集合族

$$\mathcal{B}_{x,k}=\left\{U_x:x\in U_x\subset\overline{V},\ \frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_x)}{|U_x|^s}>1-\frac{1}{k}\right\}.$$

因为 $\overline{D}_c^s(E,x)=1$, 易见 $\mathcal{B}_{x,k}\neq\varnothing$, 且

$$r_{x,k}=\sup\{|U_x|:U_x\in\mathcal{B}_{x,k}\}>0$$

是有限的. 注意

$$\mathcal{H}^s(E\cap U_x)=\mathcal{H}^s(U_x).$$

取序列 $\{U_x^i\subset\mathcal{B}_{x,k},i>0\}$ 使得 $|U_x^i|\to r_{x,k}(i\to\infty)$. 据定理 3.4.3, 必要时取子序列, 可设

$$U_x^i\xrightarrow{\mathcal{H}}U_{x,k}\subset\overline{V}(i\to\infty).$$

于是, $|U_{x,k}|=r_{x,k}$, 且据命题 3.4.4,

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_{x,k})}{|U_{x,k}|^s}\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_x^i)}{|U_x^i|^s}\geqslant 1-\frac{1}{k}.$$

设 $r_{x,k}\nrightarrow 0(k\to\infty)$. 必要时取子序列, 可设 $r_{x,k}\to r>0(k\to\infty)$. 利用定理 3.4.3 和命题 3.4.5, 容易证明, 存在紧子集 U, $x\in U\subset\overline{V}$ 使得 $|U|=r$ 且

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=1.$$

定理得证. □

下设 $r_{x,k} \to 0(k \to \infty)$. 对每一个 $k > 0$, 存在整数 $p(k) \geqslant 0$, 使得

$$U_{x,k} \subset S_{i_1} \cdots S_{i_{p(k)}}(\overline{V}),$$

但

$$U_{x,k} \subsetneq S_{i_1} \cdots S_{i_{p(k)+1}}(\overline{V}),$$

即 $p(k)$ 是满足 $T_P(k)(U_{x,k}) = (S_{i_1} \cdots S_{i_{p(k)}})^{-1}(U_{x,k}) \subset \overline{V}$ 的最大整数 (规定 $S_{i_0}(\overline{V}) = \overline{V}$).

记 $U_{p(k)} = T_{p(k)}(U_{x,k})$, $\overline{r}_k = |U_{p(k)}|$, 有

$$\overline{r}_k = |U_{p(k)}| = \frac{r_{x,k}}{c_{i_1} \cdots c_{i_{p(k)}}} \leqslant |\overline{V}|, \quad \forall k > 0.$$

所以序列 $\{\overline{r}_k\}$ 是有界的. 下面分两种情况:

情况 1.　$\overline{r}_k \nrightarrow 0(k \to \infty)$.

必要时取子序列, 可设 $\overline{r}_k \to r > 0(k \to \infty)$, 据定理 3.4.3, 又可设

$$U_{p(k)} \xrightarrow{\mathcal{H}} U, \quad k \to \infty,$$

且 $|U| = r$, $U \subset \overline{V}$. 据命题 3.4.4、命题 3.4.5 和引理 3.4.7, 有

$$\begin{aligned}
1 \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(U)}{|U|^s} &\geqslant \limsup_{k \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(T_{p(k)}(U_{x,k}))}{|T_{p(k)}(U_{x,k})|^s} \\
&= \limsup_{k \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(U_{x,k})}{|U_{x,k}|^s} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_{x,k})}{|U_{x,k}|^s} \\
&= \limsup_{k \to \infty} (1 - 1/k) = 1,
\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = 1$, 定理成立.

情况 2.　$\overline{r}_k \to 0(k \to \infty)$.

我们将证明这种情形不会发生. 记 $c = \min\{c_1, c_2, \cdots, c_m\} > 0$. 对任意给定的 $b > 0$, 对每一个 $k > 0$, 存在唯一的整数 $h(k) > 0$, 满足

$$r_{x,k}/c_{i_1} \cdots c_{i_{p(k)+h(k)}} < b \leqslant r_{x,k}/c_{i_1} \cdots c_{i_{p(k)+h(k)+1}} < b/c_{i_{p(k)+h(k)+1}} \leqslant b/c,$$

或者

$$\overline{r}_k/c_{i_{p(k)+1}} \cdots c_{p(k)+h(k)} < b \leqslant \overline{r}_k/c_{i_{p(k)+1} \cdots c_{p(k)+h(k)+1}} < b/c_{i_{p(k)+h(k)+1}} \leqslant b/c.$$

注意, $(T_{p(k)+h(k)+1}(U_{x,k}))\cap\overline{V}\neq\varnothing$ 总是成立且 $\overline{V}$ 有界, 所以 $T_{p(k)+h(k)+1}(U_{x,k})$ 一致有界, $\forall k>0$. 援引定理 3.4.3, 必要时取子序列, 不失一般性, 可设 $T_{p(k)+h(k)+1}(U_{x,k})$ 在 Hausdorff 度量意义下收敛:

$$T_{p(k)+h(k)+1}(U_{x,k})\xrightarrow{\mathcal{H}}U,\quad k\to\infty, \tag{3.4.4}$$

这里 U 是紧致子集且 $|U|>b$. 与此同时, 可以假设 $T_{p(k)+h(k)+1}(x)$ 收敛:

$$T_{p(k)+h(k)+1}(x)\to x_0\in U,\quad k\to\infty.$$

注意, $T_{p(k)+h(k)+1}(x)$ 总是内点, 但 x_0 未必.

据引理 3.4.8, 设 $q>0$ 是最小的正数, 使得

$$U\subset \text{int }(T_q(\overline{V}))=T_q(\text{int }(\overline{V})),$$

这里 $T_q=(S_{i_1}\cdots S_{i_q})^{-1}$. 因此, $T_q^{-1}(U)\subset \text{int }\overline{V}=V$ 和 $|T_q^{-1}(U)|>0$.

显然, 存在无穷多 k 对应相同, 即

$$(i_{p(k)+h(k)+1-(q-1)},i_{p(k)+h(k)+1-(q-2)},\cdots,i_{p(k)+h(k)+1})=(i_1,i_2,\cdots,i_q)$$

和 $S=T_q=S_{i_1}\cdots S_{i_q}$. 由定理 3.4.3 和命题 3.4.4, 有

$$|S(U)|=|S_{i_1}\cdots S_{i_q}(U)|=c_{i_1}\cdots c_{i_q}|U|>c_{i_1}\cdots c_{i_q}b>0.$$

最后, 由 $\overline{r}_k$ 的定义易见, $\overline{r}_k\to 0(k\to\infty)$ 是不可能的. 定理 3.4.1 证毕. □

注 3.4.9 如果

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=1,$$

那么

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_c)}{|U_c|^s}=1,$$

其中 U_c 是 U 的凸闭包, 因此在这类问题的讨论中, 总是假设这样的 U 是凸紧集. 定理 3.4.1 说明, 对满足开集条件的自相似集, 作为最好形状的紧凸集总是存在的.

注 3.4.10 对满足强分离条件的情形, 定理证明可以大大简化, 并且可以对 U 的规模进行估计, 即可以证明

$$|U|\geqslant\min\{d(S_i(E),S_j(E)),0<i<j\leqslant m\}>0,$$

其中 $d(S_i(E),S_j(E))$ 是不同 1 拷贝的距离.

注 3.4.11 我们只是证明最好形状的存在性, 对给定的点, 还不涉及在该点处最好形状的存在问题.

本节主要定理 3.4.1、定理 3.4.12 和定理 3.4.13 的证明很艰涩复杂, 但我们还没有发现更好更简单的证明方法. 这三个定理, 特别是定理 3.4.1 和定理 3.4.13 将是下面讨论满足开集条件的自相似集的理论基础, 因此有重要理论意义. 我们希望有更好和更简单的证明方法.

定理 3.4.12 *假设同定理 3.4.1. 设 U, $|U|>0$ 满足 $\dfrac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=1$, 则存在序列 $\{b_k, k>0\}$ 使得*

$$\mathcal{H}^s(E)=|U|^s\Big/\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

证明 为了简单起见, 只证明一种特殊情况, 即所有相似压缩比都相同, 即 $c_j=c, j=1,2,\cdots,m$. 对于一般情形, 除符号更多更繁杂外无本质困难.

对每一个 $k>0$ 和 $\forall(i_1\cdots i_k)\in J_k$, E 的每一个 k 拷贝的 $\mathcal{H}$ 测度为

$$\mathcal{H}^s(S_{i-1}\cdots S_{i_k}(E))=c^{ks}\mathcal{H}^s(E).$$

用 a_1 表示包含在 U 内的 $\overline{V}$ 的 1 拷贝的个数.

用 a_2 表示包含在 U 内的 $\overline{V}$ 的 2 拷贝的个数 (不重复计算, 即已包含在 U 内 1 拷贝的 2 拷贝不再计算, 下同).

设对 $0<j<k$, a_j 已定义, 归纳地,

用 a_k 表示包含在 U 内 $\overline{V}$ 的 k 拷贝的个数.

用 M_k 表示包含在 U 内 $\overline{V}$ 的所有阶数不大于 k 的各阶拷贝的并集.

用 M 表示包含在 U 内 $\overline{V}$ 的所有各阶拷贝的并集.

因为 U 是凸紧集, 易于证明, $E\cap\partial U$ 的 $\mathcal{H}$ 维数严格小于 s, 这里 ∂U 表示 U 的边界. 因此 $\mathcal{H}^s(E\cap\partial U)=0$, 因而有

$$E\cap(\operatorname{int}U-\overline{M})\subset\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1\cdots i_k)\in J_k}S_{i_1}\cdots S_{i_k}(\partial\overline{V})\right)\right),$$

即在 $E\cap(\operatorname{int}U-\overline{M})$ 内没有 E 的内点, 因为若在开集合 $\operatorname{int}U-\overline{M}$ 中有内点, 则对某个 $k>0$, 存在 $\overline{V}$ 的某个 k 拷贝在 $\operatorname{int}U-\overline{M}$ 内, 但这与上述构造矛盾. 因此有

$$\mathcal{H}^s(E\cap(U-\overline{M}))=\mathcal{H}^s(E\cap(\operatorname{int}U-\overline{M}))=0$$

和 $\mathcal{H}^s(E\cap U)=\mathcal{H}^s(E\cap\overline{M})$. 因为 $M_k\xrightarrow{\mathcal{H}}\overline{M}$, 有 $\mathcal{H}^s(E\cap M_k)\to\mathcal{H}^s(E\cap\overline{M})$ 且有

$$\mathcal{H}^s(E\cap\overline{M})=\mathcal{H}^s(E\cap U)\left(\sum_{k>0}a_kc^{ks}\right)\mathcal{H}^s(E),\quad k\to\infty.$$

因此

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=\frac{(\sum_{k>0}a_kc^{ks})\mathcal{H}^s(E)}{|U|^s}=1,$$

或者

$$\mathcal{H}^s(E)=|U|^s\Big/\sum_{k>0}a_kc^{ks}.$$

令 $b_k=a_kc^{ks}$, 即完成证明. □

定理 3.4.13 满足开集条件的自相似集有几乎处处最好覆盖. 设 $E\subset R^n$ 为满足开集条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E)=s$, 则存在集合族 $\{U_i\}_{i>0}$ 满足

$$\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_{i=1}^{s}U_i\right)=0;\quad \mathcal{H}^s(E)=\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s.$$

证明 据定理 3.4.1, 可设 U, $|U|>0$, 满足

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(U)}{|U|^s}.$$

据缩放比例性质, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U))}{|(S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U))|^s},\quad \forall k>0,(i_1i_2\cdots i_k)\in J_k.$$

为了叙述方便, 引进下面的符号. 设 $A\subset R^n$ 和 $\xi,\zeta,\cdots$ 为 R^n 的子集的集合族. 定义

$$\zeta\cup\xi=\{C:C\in\xi\ \text{或}\ C\in\zeta\},$$

并记

$$A\cap\xi=\varnothing\Leftrightarrow\mathcal{H}^s(E\cap A\cap B)=0,\quad \forall B\in\xi.$$

记

$$\alpha_0=\{U\};$$

$$\alpha_1=\{S_i(U):S_i(U)\cap\alpha_0=\varnothing,\quad 0<i\leqslant m\};$$

$$\alpha_2=\{S_{i_1}S_{i_2}(U):S_{i_1}S_{i_2}(U)\cap(\alpha_0\cup\alpha_1)=\varnothing,(i_1i_2)\in J_2\}.$$

归纳地, 设对 $0<j<k$, α_j 已定义. 记

$$\alpha_k=\{S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U):S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U)\cap(\alpha_0\cup\cdots\cup\alpha_k)=\varnothing,(i_1\cdots i_k)\in J_k\}.$$

于是得到序列 $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$. 设 $\alpha=\bigcup_{i=0}^{\infty}\alpha_i$. 从上述构造易见, α 是 E 的几乎处处覆盖. 另外, 易见

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap M)}{|E\cap M|^s}=1,\quad \forall M\in\alpha,$$

且任何 α 中两个不同元素的交有 $\mathcal{H}^s$ 零测度. 用与前一定理证明中相同的讨论, 可得

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum_{M\in\alpha} \mathcal{H}^s(E\cap M) = \sum_{M\in\alpha} |E\cap M|^s.$$

所以

$$\alpha\cap E = \{\alpha_i \cap E : \alpha_i \in \alpha\}$$

是 E 的几乎处处最好覆盖. □

注 3.4.14　本节的结果还不能直接用来计算 Hausdorff 测度, 因为这里只是证明最好形状的存在性, 并没有完全决定最好形状 (包括它的直径、位置和几何形状), 而只有完全决定了最好形状才能给出定理 3.4.12 中级数的系数. 这回答了本节开头所提的第一个为什么. 而利用 "部分估计原理" 所得到的 Hausdorff 测度的估计结果再 "像" 准确值, 也无法证明之, 这是因为我们是通过把一个集合当作 "部分估计原理" 的等式解而得到这个 Hausdorff 测度估计结果的, 只有这个集合真的是 "部分估计原理" 的等式解, 所得 Hausdorff 测度的估计结果才是准确值, 但当 Hausdorff 维数大于 1 时, 至少到目前为止, 一般很难确定某个集合是不是 "部分估计原理" 的等式解, 即是不是最好形状. 寻求最好形状就是寻求 "部分估计原理" 的非平凡等式解, 至少在目前, 人们还没有这样的有效方法. 这是对前面提到的第二个为什么的回答. 本节的结果只是把 Hausdorff 测度的计算转化成寻求最好形状, 其理论意义大于其实际的应用意义.

注 3.4.15　否定 Marion 的两个猜测是本书的源头, 下面再作一些说明. 在 Marion[15] 之后, 一系列文献陆续对 Sierpinski 垫片等的 Hausdorff 测度作出新的估计, 并提出新的猜测, 如文献 [25~ 27, 30, 31] 等, 它们大都涉及 "部分估计原理", 即构造一个子集合并讨论这个子集合所包含的部分 Hausdorff 测度. 如我们所说, 即使所得到的值很 "像" 是准确值, 人们也几乎无法证明它就是准确值. 原因是都没有证明所涉及的子集合是最好形状. 事实上, 包括 Marion 在内, 人们对 Hausdorff 测度的复杂性认识过于肤浅, 虽然认识到了 Hausdorff 测度计算的困难性, 但没有发现这种困难性的症结所在, 可谓知其然而不知其所以然. 有学者认为, Hausdorff 测度的计算可在有限步实现, 情况当然远非如此.

设 E 同上. "部分估计原理" 说, 对任意子集 U, 有

$$\mathcal{H}^s(E\cap U) \leqslant |U|^s,$$

或

$$|U|^s - \mathcal{H}^s(E\cap U) \geqslant 0, \tag{3.4.5}$$

或

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)^s}{|U|} \leqslant 1. \tag{3.4.6}$$

当人们构造 U 时, 使得 (3.4.5) 越接近 0 或 (3.4.6) 越接近 1, 所得估计结果越好, 而当前者等于 0 或后者等于 1, 所得结果才是准确值, 但当 Hausdorff 维数大于 1 时, 目前还没有办法证明一个子集合是否为最好形状. 所以, 据我们的理论, 计算准确的 Hausdorff 测度, 必须构造最好形状. 最好形状是凸集, 决定一个凸集有三大要素, 即直径、形状和位置, 缺一不可. 直径不是唯一的, 但它们之间有一个比例相关联, 必须先确定一个; 有了直径, 还必须决定其形状和位置, 对直线上的情形决定形状比较简单, 因为直线上有界凸集就是闭线段, 只需决定其位置即可 (这是维数不大于 1 的直线上分形, $\mathcal{H}$ 测度计算简单的重要原因). 当维数大于 1 时, 在高维空间决定一个给定直径而又适合要求的凸集就比较麻烦, 它必须在那样位置上和有那样的形状, 使其包含分形中的点 "最多". 还需注意的是我们是在分形上决定凸集的, 较之在实空间上又增加一层新的困难. 这些困难至少在目前人们还没有有效办法去克服. 可以说, 维数大于 1 的测度的计算困难症结就在于此. 下一章主要目的就是为克服这些困难而寻找出路.

第 4 章　自相似集的结构

从宏观上看, 满足开集条件的自相似集的构造是很清楚的, 它们是一个由有界区域在有限个相似压缩的迭代作用下的极限集. 但是, 它们的内部结构或点的微结构却完全不清楚, 很可能这种内部结构或点的微结构正是我们所遇到的一切困难的症结所在. 到目前为止, 自相似集的内部结构的研究还没有被涉及过. 自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度的计算如此困难, 使我们意识到这种内部结构的研究是不可避免的, 而上凸密度的概念为研究这种内部结构开辟了一条通路. 所谓自相似集的结构, 当前主要是判断其上凸密度是否到处都是 1, 即设 E 为满足开集条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 判断 $E_1 = E$ 或 $E_1 \subsetneqq E$, 其中 $E_1 = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) = 1\}$. 当 $s > 1$(非整数) 时, 这是非常困难的问题. 为了后者成立, 只需判断某个特殊点有上凸密度小于 1 即可, 在经典的自相似集, 如 Sierpinski 垫片、Koch 曲线以及 Sierpinski 地毯等这样的点很容易找到, 这给我们的研究带来很大方便, 但对一般情形这种点如何去找也不是一个简单问题. 我们从试图计算和估计 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线等的 $\mathcal{H}$ 测度开始, 一路走来, 到此目标开始有了转变, 计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度将不再是我们的主要目标, 由上凸密度引申出的 "自相似集的结构或点的微结构" 将成为此后的主角. $\mathcal{H}$ 测度的计算和估计的困难只是表象, 而 "自相似集的结构" 的困难才是 "实质". 我们在前言中说, $\mathcal{H}$ 测度的计算与估计是基础数学而非计算数学, 正是指此.

4.1　微　结　构

上面提出微结构这个新术语, 下面将进行较详细的阐述.

先以 Sierpinski 垫片 S 的生成过程为例, 说明 S 中的点在 S 中的局部环境的生成过程. 如图 4.1.1 所示, 一级压缩把图中第二个中间那个 "倒置" 的边长为 $\frac{1}{2}$ 小三角形剥离掉; 二级压缩又把图中三个位于三个留下的边长为 $\frac{1}{2}$ 的三个三角形每一个中间那个 "倒置" 的边长为 $\frac{1}{4}$ 的三角形剥离掉, 一直下去, 最后留下的就是 Sierpinski 垫片, 而在 S 中的每一个点的周围都形成各自的 "局部环境". 对 S 中不同的点, 其局部环境显然也不同.

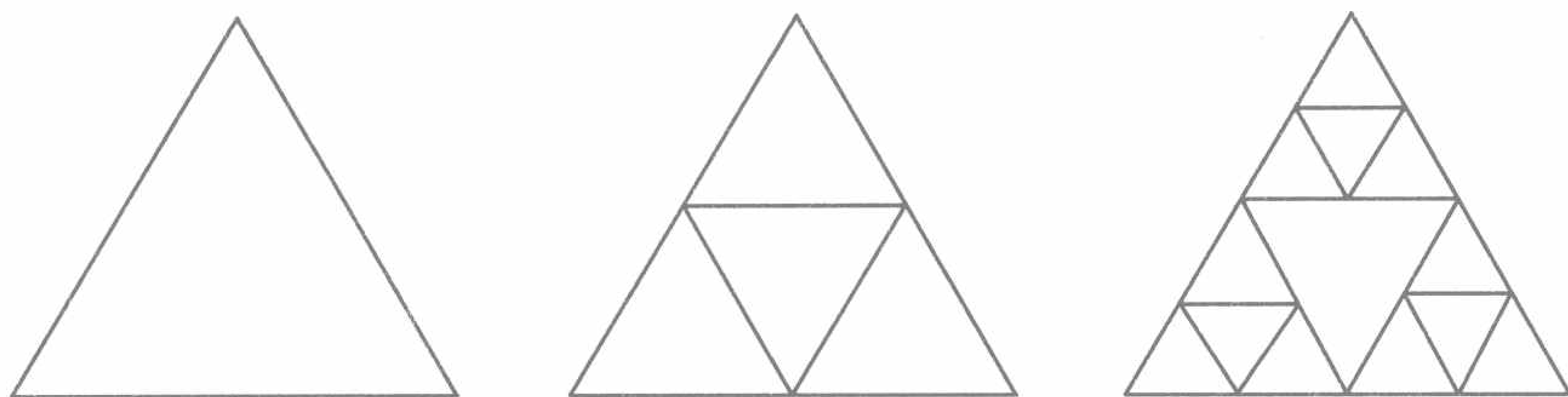


图 4.1.1 Siepinski 垫片 (前二级压缩)

一般情形. 设 E 是满足开集条件的自相似集, 由相似压缩函数系:

$$S_i : D \to D, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

生成. 设 $x \in E$. 考察点 x 在 E 中的周围环境的生成情况. 设 $(i_0, i_1, \cdots)$ 是 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上无限序列, 使得

$$x = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_{i_0} S_{i_1} \cdots S_{i_k}(E) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_{i_0} S_{i_1} \cdots S_{i_k}(D).$$

显然

$$x \in S_{i_0} S_{i_1} \cdots S_{i_{k+1}}(D) \subset S_{i_0} S_{i_1} \cdots S_{i_k}(D), \quad \forall k > 0.$$

也就是说, 每多压缩一次, 在 x 周围 D 中的点就被多剥离一些, 而当经无限次压缩之后, x 周围只留下 E 中点, 即形成 x 在 E 中的 "局部环境".

与 Sierpinski 垫片的情形一样, 这个过程对 E 中每一点都这样生成其在 E 中的局部环境. 对 E 中不同的点, 其局部环境一般不同. 这就形成 E 中不同的点有不同的微结构. 所以, 所谓 E 中点的微结构就是这个点在 E 中的局部环境, 我们无法做进一步数学描述, 即不能给出更精确的数学定义. 这是一个局部性质, 可只在该点的任意邻域 (只能是邻域而不能是包含该点的集合) 内考虑. 从上述微结构的生成过程很难发现其规律性, 究竟可以生成多少不同的微结构很难判断. 目前只能说微结构具有多样性, 而正是这种微结构的多样性的不同构成整个分形的复杂性的不同. 怎样描述微结构的多样性呢? 我们给出下述定义.

定义 4.1.1 设 $x, y \in E$ 为不同两点. 称它们有相同的微结构, 如果存在它们各自的邻域

$$U_x, U_y \subset R^n$$

和相似变换 $\Phi : R^n \to R^n$, 使得

$$\Phi(x) = y, \quad \Phi(E \cap U_x) = E \cap U_y.$$

定理 4.1.2 有相同微结构的点有相同的上凸密度.

证明 设 $x,y\in E$ 有相同的微结构. 据定义, 存在它们各自的邻域 $U_x,U_y\subset R^n$ 和相似变换 $\Phi:R^n\to R^n$, 使得 $\Phi(x)=y,\Phi(E\cap U_x)=E\cap U_y$. 记 Φ 的相似比为 $0<c$. 不妨设 $x\in U_{x,i},|U_{x,i}|\to 0$, 使得

$$\overline{D_c^s}(E,x)=\lim_{i\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_{x,i})}{|E\cap U_{x,i}|^s}.$$

据缩放原理, 有

$$\begin{aligned}\overline{D_c^s}(\Phi(E),y)&\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s(\Phi(E\cap U_{x,i}))}{|\Phi(E\cap U_{x,i})|^s}\\&=\lim_{i\to\infty}\frac{c^s\mathcal{H}^s(E\cap U_{x,i})}{c^s|E\cap U_{x,i}|^s}=\lim_{i\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_{x,i})}{|E\cap U_{x,i}|^s}=\overline{D_c^s}(E,x).\end{aligned}$$

同样可以证明相反方向的不等式. □

定理 4.1.2 又引出一系列问题需要考虑. 例如, 上述定理的逆也真吗? 有例子说明不真, 不过我们的例子是整数维的情形, 如正方形的内点与其非顶点边上的点有不同的微结构, 却有相同的上凸密度. 对于 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的情形, 也有例子说明其不真, 例如, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯, 其 $\mathcal{H}$ 维数为 1, 其中每一点都有上凸密度 1, 显然, 并不是其中每两点都有相同的微结构. 我们还没有发现 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 的这样的例子. 这样例子如能构造出来, 其本身意义如何并不重要, 但如能从中揭示出某种一般性的规律, 给我们以启迪, 那就非常重要了.

4.2 E 中点的分类和按上凸密度的分解

可以给 E 中的点两种分类:

分类 $I_1: x\sim_1 y\Leftrightarrow x$ 和 y 有相同的微结构;

分类 $I_2: x\sim_2 y\Leftrightarrow \overline{D_c^s}(E,x)=\overline{D_c^s}(E,y)$.

容易看出, 这两种分类都是等价关系, 即均满足反身性、对称性和传递性. 下面用 $I_1(x);I_2(x)$ 分别表示点 $x\in E$ 所在的相应的等价类. 由上述定理, 易见

$$x,y\in E,I_1(x)\cap I_2(y)\neq\varnothing\Rightarrow I_1(x)\subset I_2(y).$$

在这个意义下, 可以认为 I_1 是 I_2 的再分类. 不难看出 $E_1=E$ 就是按 I_2 分类只有一类, 但按 I_1 分类一般不是. 正方形作为满足开集条件的自相似集 ($\mathcal{H}$ 维数为 2), 按 I_2 分类只有两类, 而按 I_1 分类有三类 (边上非顶点的点显然有相同的微结构, 四个顶点为同一类, 内点为同一类). $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯 (有 $\mathcal{H}$ 维数为 1) 按 I_2 分类只有一类, 按 I_1 分类就不清楚. 而 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯 $\Big($有 $\mathcal{H}$ 维数为

$\left.\frac{\log 4}{\log 3}\right)$、Sierpinski 垫片$\left(\text{有 }\mathcal{H}\text{ 维数为 }\frac{\log 3}{\log 2}\right)$和 Koch 曲线$\left(\text{有}\mathcal{H}\text{ 维数为 }\frac{\log 4}{\log 3}\right)$的两种分类都完全不清楚. 例如, 我们一直希望决定 Sierpinski 垫片边上中点的上凸密度, 事实上, 就是希望决定边上中间那个点与其顶点是否在 I_2 分类下属于同一类 (它们在 I_1 分类下不属于同一类是明显的). 对 Koch 曲线有相同的情形, 但我们已经证明, 其上面那个顶点的上凸密度大于其端点的上凸密度, 因此, 按第二种分类它们不在同一类 (见后面). 从上述点的微结构生成过程我们已经能够感受到, 微结构将是非常复杂的, 而 E 就是由微结构各不相同的点构成, 因此很可能这就是 "自相似集内部结构" 的复杂性和困难症结所在. 此后的主要工作就是深化这种分类研究.

下面设 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s > 0$. 记

$$E_r = \{\overline{D_c^s}(E, x) = r, x \in E\}, \quad r \in (0, 1].$$

已知 $\mathcal{H}^s(E_1) = \mathcal{H}^s(E)$, 因此 $\dim_{\mathcal{H}} E_1 = s$, 而 $E - E_1$ 是 $\mathcal{H}^s$ 零测集, 即 $\mathcal{H}^s$"小集合", 但是否有

$$\dim_{\mathcal{H}}(E - E_1) = 0 \tag{4.2.1}$$

并不清楚. 如果是这样, 则 $E - E_1$ 由可数点构成. 这应该是满足开集条件的自相似集的结构的一个重要问题. 如果 $\mathcal{H}$ 维数不小于 1(非整数), 目前既不能决定上式成立与否, 也没有例子支持任何结论. 就是当 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时, 除 $E = E_1$ 外, 也所知不多. 也就是说, $E - E_1$ 这个 $\mathcal{H}^s$"小集合" 是不是也可以非常复杂? 动力系统引进 "通有"(generic) 概念后, 有大量例子说明, 困难问题的最终解决往往就归结在某种 "小集合" 上. 另外, 可否有

$$\dim_{\mathcal{H}}(E - E_1) = s \tag{4.2.2}$$

或

$$0 < \dim_{\mathcal{H}}(E - E_1) < s \tag{4.2.3}$$

也都不清楚. (4.2.1) 显然蕴涵

$$\dim_{\mathcal{H}}(E_r) = 0, \quad \forall r \in (0, 1), \tag{4.2.4}$$

但其逆不一定真, 即对每一个 $r \in (0,1), E_r$ 基数可数并不蕴涵 $E - E_1$ 基数可数. 再者, 由测度的基本性质可知, (4.2.2) 或 (4.2.3) 并不蕴涵

$$\exists r \in (0, 1) | \dim_{\mathcal{H}}(E_r) > 0. \tag{4.2.5}$$

因为 (4.2.2) 或 (4.2.3), 说明上凸密度小于 1 的点是不可数的, 不可数个零测集的并也可能有非零测度. 如果 (4.2.5) 对某一个 $r \in (0, 1)$ 成立, 则 E_r 的规模就很大.

前面我们说过, 自相似集的结构问题首先是决定 $E_1 = E$ 或 $E_1 \subsetneq E$. 现在问题已深化, 当 $E_1 \subsetneq E$ 时, 还需决定 $E - E_1$ 的规模, 即它至多是可数的还是也可以不可数? 前者需要一个严格证明, 而后者只需构造一个例子即可. 当 $E_1 \subsetneq E$ 时, 还有两种可能, 即这时一定有 $E - E_1$ 不可数或也存在可数的情况 (一般这种问题的考虑仅限于非整数维数的情况, 即真正的分形). 再进一步的问题是, 决定是否

$$\exists r \in (0,1] | \dim_{\mathcal{H}}(E_r) > 0.$$

当 $E - E_1$ 不可数时, 上式可能成立, 也可能不成立. 所有这些都反映了自相似集结构的异同.

显然

$$E = \bigcup_{r \in (0,1]} E_r. \tag{4.2.6}$$

这就是 E 的按上凸密度的分解, 类似重分形分解. 我们说过, 满足开集条件的自相似集可以复杂到什么程度人们并不清楚. 上述情况的种种不同反映了这种复杂程度. 因此, 按上凸密度的分解是一个非常值得研究的问题.

一般点的微结构的研究使我们有无从下手之感, 下面将从比较简单的压缩函数的不动点着手.

4.3 相似压缩函数的不动点

前面在讨论自相似集的相似压缩函数系时用的是抽象的描述方法, 没有写出具体的表达式. 下面以 $C \times C$ 和 Koch 曲线为例写出其具体的相似压缩函数系, 以便讨论相关问题.

设 C 为三分中间 Cantor 集, 为由单位线段生成, 并取其左端点为坐标原点. 它的一个相似压缩函数系为 $S_1(x) = \dfrac{x}{3}; S_2(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$.

设 $C \times C$ 为三分 Cantor 集与自身的乘积, 即 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$-Sierpinski 地毯, 它的一个相似压缩函数系 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ 如下 (参考图 4.3.1), 其中 $ABCD$ 为单位正方形, A 为坐标原点, 从 A 到 B 为 x 轴方向):

$$\begin{cases} S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ S_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad S_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

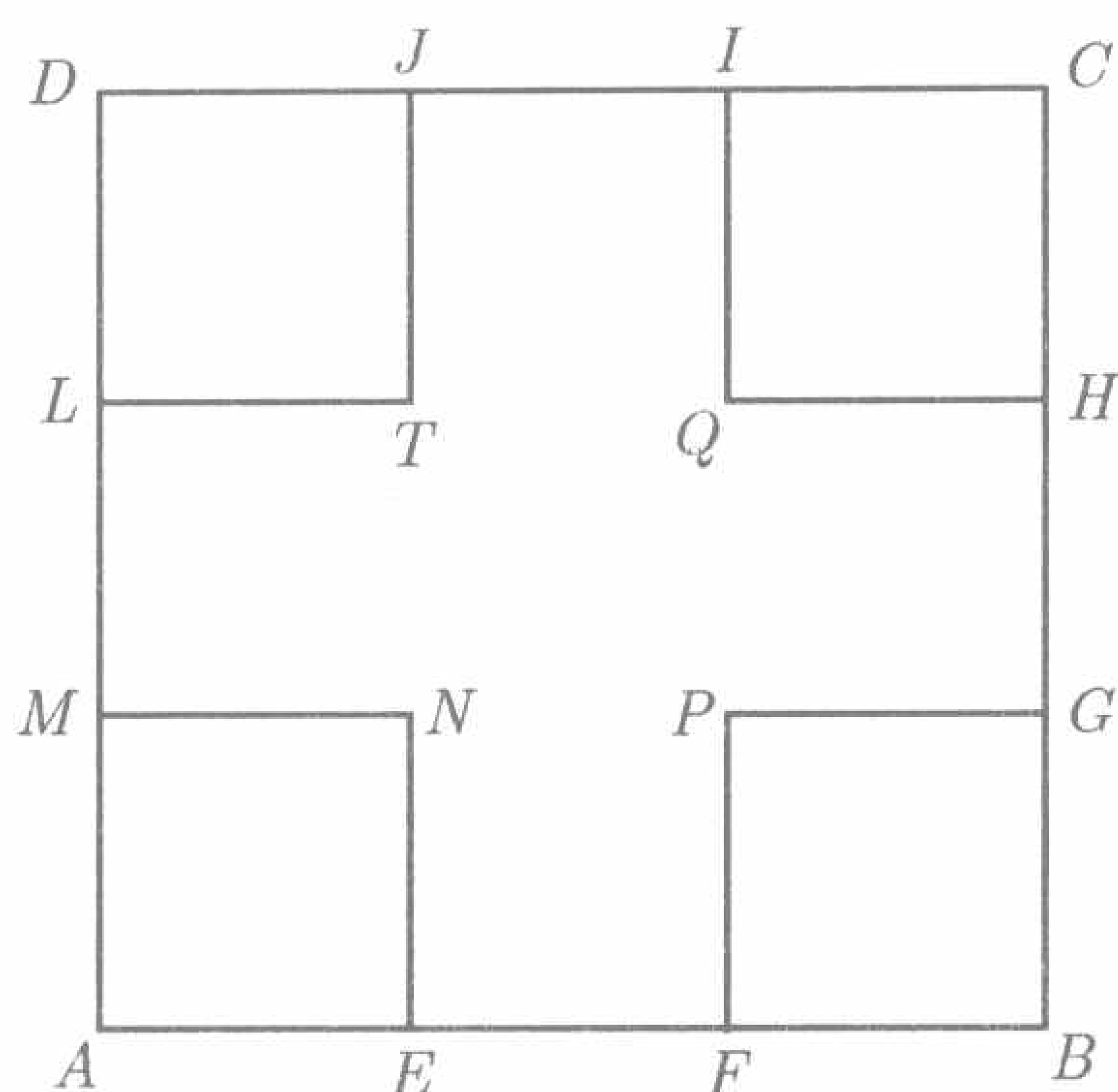


图 4.3.1 $C\times C$ 相似压缩函数系

容易看出

$$S_1(\square ABCD)=\square AENM;\quad S_2(\square ABCD)=\square FBGP;$$
$$S_3(\square ABCD)=\square QHCI;\quad S_4(\square ABCD)=\square LTJD.$$

即 S_1, S_2, S_3, S_4 分别把 $\square ABCD$ 映成四个小正方形. 显然, 这样的相似压缩不是唯一的. 例如, 对上述给定的相似压缩函数系, 有下述对应

$$S_1(A)=A,\quad S_1(C)=N,\quad S_1(B)=E,\quad S_1(D)=M,$$

但下述对应

$$A\to N,\quad C\to A,\quad B\to E,\quad D\to M$$

亦决定平面上一个正交变换, 并把 $\square ABCD$ 映成 $\square AENM$, 用这个正交变换代替 S_1 中的相应正交变换, 其余三个相似变换不改变, 也是生成 $C\times C$ 的相似压缩函数系. 因此, 一般而言, 生成自相似集的相似压缩函数系是不唯一的. 一般讨论如下.

设 $E\subset R^n$ 是满足开集条件的自相似集, 由相似压缩函数系 $\alpha=\{S_1,S_2,\cdots,S_m,m>1\}$ 生成, 其对应相似比为 $\{c_1,\cdots,c_m\}$, 并设 V 为其一个恰当集. 记 J_k 为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上全体不同 k 排列的集合. 记

$$\alpha_k=\{S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k},\forall(i_1,\cdots,i_k)\in J_k\},\quad k>0.$$

定理 4.3.1 $\forall k>0,\alpha_k$ 是 E 的一个相似压缩函数系, V 亦是其恰当集.

证明 不失一般性, 下面仅对 $k=2$ 加以证明. 由

$$V\supset\bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

和

$$S_i(V)\cap S_j(V)=\varnothing,\quad i\neq j$$

易见

$$\bigcup_{(i_1,i_2)\in J_2} S_{i_1}S_{i_2}(V)=\bigcup_{i_1=1}^{m} S_{i_1}\left(\bigcup_{i_2=1}^{m} S_{i_2}(V)\right)\subset\bigcup_{i_1=1}^{m} S_{i_1}(V)\subset V$$

和

$$S_{i_1}S_{i_2}(V)\cap S_{i_3}S_{i_4}(V)\supset S_{i_1}(V)\cap S_{i_3}(V)=\varnothing,$$

如果 $i_1\neq i_3$. 事实上, 可以证明, 只要 $(i_{i_1},i_{i_2})\neq(i_{i_3},i_{i_4})$, 上式就成立. □

每一个 α_k 都称作由 α 迭代生成的压缩函数系, 因此, 每一个满足开集条件的自相似集都至少可由可数个相似压缩函数系生成. 根据压缩映射的不动点定理, 每一个相似压缩函数有唯一的不动点. 例如, 对上面给出的 $C\times C$ 的相似压缩函数系, 容易看出 S_1, S_2, S_3, S_4 的不动点分别是 A, B, C, D. 上两章在讨论 $C\times C$ 的 $\mathcal{H}$ 测度的估计和顶点处上凸密度的估计时, 用到的就是这个相似压缩函数系, 它的四个顶点分别是相应相似压缩函数的不动点, 这给我们的讨论带来很大方便. 不同的相似压缩函数系显然有不同的相应的不动点. 因此有下述结论.

命题 4.3.2 *对一般满足开集条件的自相似集 E, 可以存在彼此不是由迭代生成的相似函数压缩系.*

证明 为了证明这个命题, 以 Koch 曲线为例, 构造一个不能由另一个迭代生成的两个相似函数压缩系.

(4.3.2) 式是通常 Koch 曲线的相似压缩函数系 (见图 4.3.2), 由四个相似压缩函数构成, 其相似比均为 $\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} S_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\\ S_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix};\\ S_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix};\\ S_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}. \end{cases}\tag{4.3.2}$$

易见

$$S_1(\triangle ABC)=\triangle AHD;\quad S_2(\triangle ABC)=\triangle HEC;$$
$$S_3(\triangle ABC)=\triangle CJF;\quad S_4(\triangle ABC)=\triangle JGB.$$

其中

$$S_1(A) = A; \quad S_4(B) = B;$$
$$S_2(X) = X, \quad X \in \triangle HEC;$$
$$S_3(Y) = Y, \quad Y \in \triangle JFC.$$

即 S_1, S_4 的不动点是相应三角形的一个顶点, 而 S_2, S_3 的不动点在相应三角形的内部而非某个顶点.

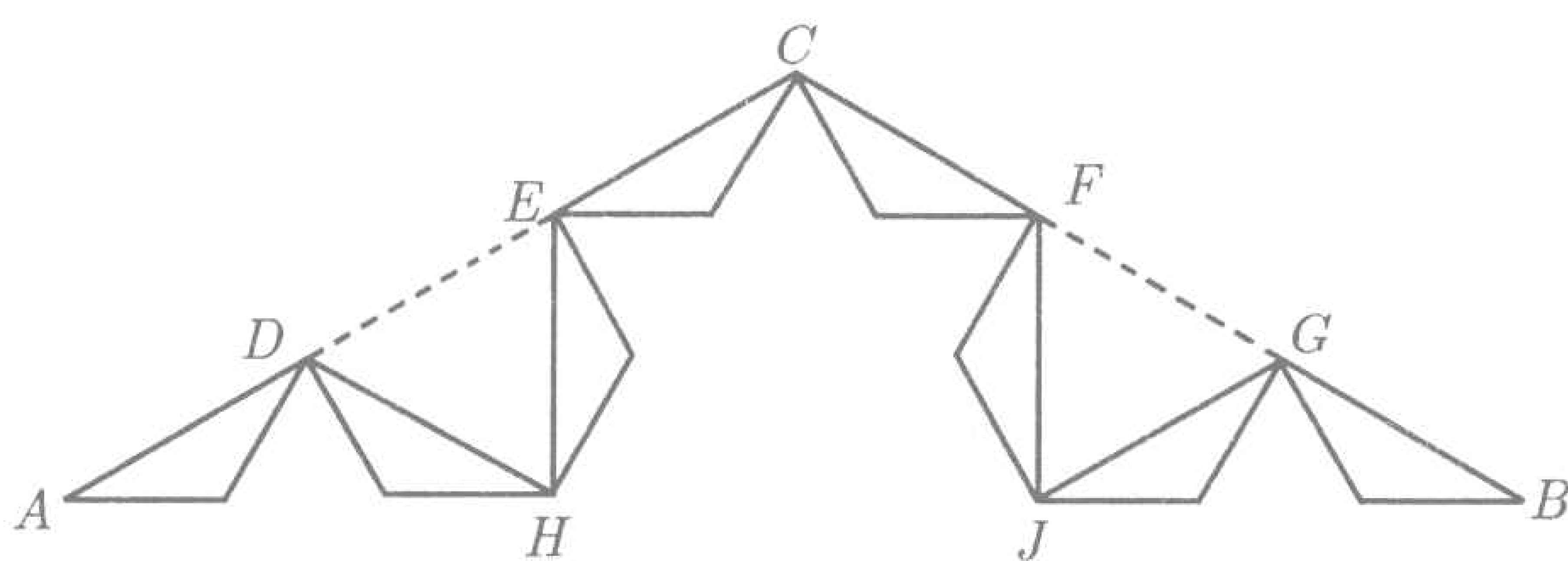


图 4.3.2 Koch 曲线相似压缩函数系 (I)

这种生成 Koch 曲线的方法与 1.1 节生成 Koch 曲线的方式等价 (见例 1.1.3).

我们还可以构造 Koch 曲线的另一个相似函数压缩系, 它由七个压缩函数组成, 如图 4.3.3 所示, 其中三个的相似比为 $\frac{1}{3}$, 分别把 $\triangle ACB$ 映成 $\triangle AGF, \triangle HMB, \triangle OCN$, 而另四个的相似比为 $\frac{1}{9}$, 分别把 $\triangle ACB$ 映成 $\triangle GIJ, \triangle IHR, \triangle MTS, \triangle TON$. 易于验证

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 4\left(\frac{1}{9}\right)^s = 1$$

的 $s = \frac{\log 4}{\log 3}$, 即为 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 维数. 同样可以写出它们的函数表达式, 这里从略.

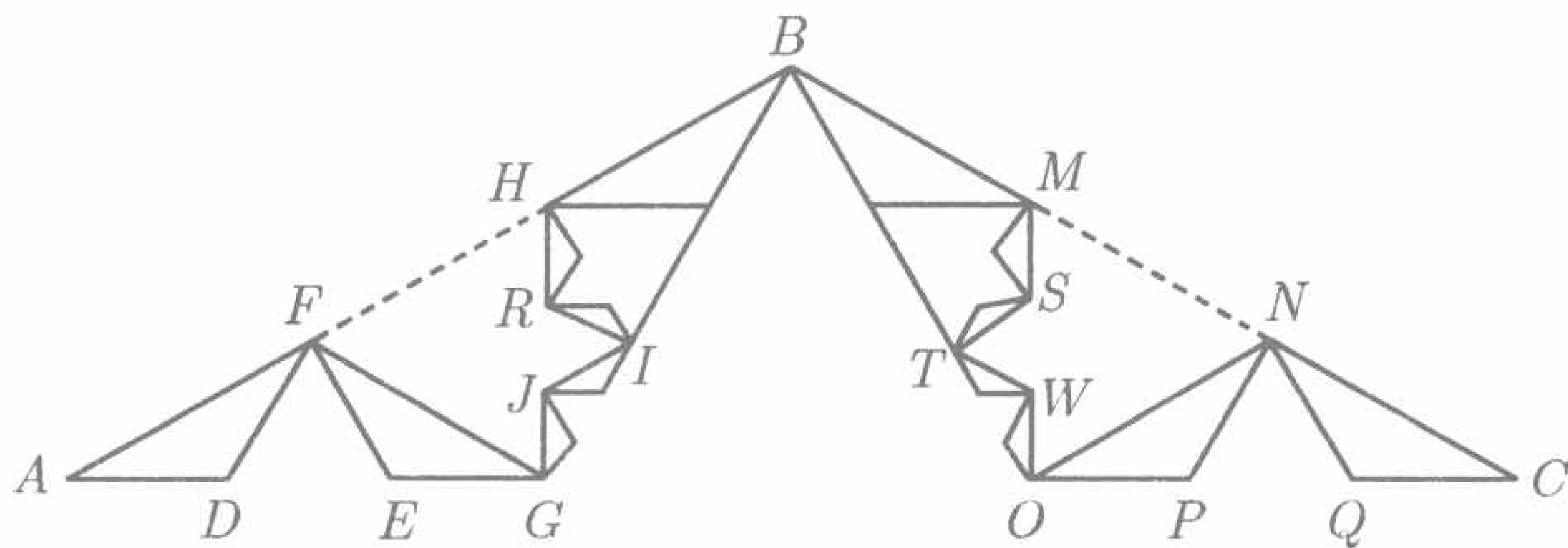


图 4.3.3 Koch 曲线相似压缩函数系 (II)

我们还可以给出 Koch 曲线另一个相似函数压缩系, 由五个相似压缩函数组成: 把 $\triangle ABC$ 分别压缩成 $\triangle AGF, \triangle HMB, \triangle OCN$, 压缩比均为 1/3. 另外, 把 $\triangle ABC$ 分别压缩成 $\triangle GIH, \triangle OTM$, 压缩比均为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$. 容易验证

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^s+2\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^s=1$$

中的 $s=\dfrac{\log 4}{\log 3}$ 亦为 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 维数. 亦可写出其函数表达式, 从略.

具有相同相似比的相似压缩函数系的迭代相似函数压缩系的相似比也全相同, 故上述第二个相似函数压缩系不能由第一个迭代生成, 同样, 第一个也不能由第二个生成. □

设 E 是满足开集条件的自相似集, 它的一个相似函数压缩系和相应相似比为

$$\alpha=\{S_1,S_2,\cdots,S_m,0<c_{i_1},\cdots,c_{i_k}<1,m>1\}.$$

下面讨论的问题对 $\mathcal{H}$ 维数不加限制, 但其中重要的是 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 的情形. 用 $F(E)$ 表示 E 对所有可能的相似压缩函数系的相似压缩的不动点的集合.

定理 4.3.3 $\overline{F(E)}=E$, *即 $F(E)$ 在 E 中稠密.*

证明 由 α 生成的 E 的所有迭代相似函数压缩系一般形式为

$$\alpha_k=\{S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k},(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in J_k,k>1\}.$$

记

$$S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(x_{i_1i_2\cdots i_k})=x_{i_1i_2\cdots i_k},$$

即 $x_{i_1i_2\cdots i_k}$ 是 $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}$ 的不动点. 显然

$$x_{i_1i_2\cdots i_k}\in S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E),\quad \forall(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in J_k. \tag{4.3.3}$$

易见

$$|S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E)|\xrightarrow[k\to\infty,\forall(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in J_k]{}0.$$

因为

$$E=\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in J_k}S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E), \tag{4.3.4}$$

且每一个 $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E)$ 都包含相应压缩函数的不动点 (同一个相似函数压缩系的不同压缩函数的不动点不重迭), 显然定理结论成立. 进而, 容易看出

$$\sup_{k\to\infty,(i_1,i_2,\cdots,i_k),(j_1,j_2,\cdots,j_k)\in J_k}\{|x_{i_1i_2\cdots i_k}-x_{j_1j_2\cdots j_k}|\}=|E|. \tag{4.3.5}$$

□

我们提出如下几个问题, 这些问题对研究自相似集合的结构也许是更基本的.

(1) 在满足开集条件下, 同一个相似压缩函数系的不同的相似压缩函数的不动点是否会重合? 如果不同的两个相似压缩函数的不动点重合, 这个不动点必同时属

于不同的 E 的两个 1 拷贝, 因此在满足强分离条件下, 这种情况是不会发生的. 在仅满足开集合条件下可以证明也是不会发生的, 一个简单证明由阮火军给出. 这个结论上面已经利用过.

(2) 是否存在相似压缩函数系, 使得不同的不动点的距离的最大值等于该自相似集的直径, 即是否存在 E 的相似压缩函数系

$$\{S_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

和相应的不动点

$$\{S_i(x_i)=x_i, i=1,\cdots,m\},$$

使得

$$\max_{0<i<j\leqslant m}\{|x_i-x_j|\}=|E|?$$

这是对 (4.3.5) 的进一步提问, 即所有相似函数压缩系的所有不同不动点的距离的上确界等于整个自相似集的直径, 那么是否存在一个相似压缩函数系, 使得不同不动点的最大距离实现 E 的直径? 对我们熟悉的几个经典自相似集, 如 Sierpinski 垫片、Koch 曲线以及 Sierpinski 地毯等, 答案都是肯定的, 一般情形如何, 似乎也不是一个简单问题. 如果答案是肯定的, 这需要一个严格的证明, 否则, 需要构造反例.

(3) 如果把彼此可以互相迭代生成的和那些仅在形式上不同的相似函数压缩系视为相同, 那么在什么条件下, 一个自相似集有唯一的相似压缩函数系? 我们知道, 对空间任意集合, 总是存在空间的正交变换使这个集合本身不变 (其中的点可以变动), 例如恒同变换. 此外, 还有没有其他变换也满足这个性质? 如果对某个自相似集, 不存在空间不同于恒同变换的正交变换, 使这个自相似集本身不变, 显然, 这个自相似集就没有不同的相似压缩函数系, 即其相似压缩函数系是唯一的. 这个问题显然与自相似集的结构有关, 并涉及使这个自相似集不变的空间正交群的子群的构造, 解决起来也是不容易的. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯、$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯和 Sierpinski 垫片可以认为有唯一的相似函数压缩系, 因为从它们的多种对称性不难看出, 它们的不同的相似函数压缩系虽不能彼此迭代生成, 但其区别仅仅是相差个别相似压缩的某种加细和对称、旋转等. 这样的差别可以认为仅仅是形式上的差别. 不过, 这种形式上的差别可以导致不动点结构的改变, 这里不作过多讨论. 对一般情形的讨论有待深入 [5].

(4) 可以对不动点进行分类. 设 $E\subset R^n$ 是满足开集条件的自相似集, 其一个相似函数压缩系为 $\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$. 并设 $S_i(x_i)=x_i, i=1,2,\cdots,m$, 即为相应相似压缩的不动点. 称不动点 $x_i,x_j,i\neq j$ 属于同一类, 如果存在相似变换 $\Phi:R^n\to R^n$ 使得

$$\Phi(S_i(E))=S_j(E),\quad \Phi(x_i)=x_j.$$

从微结构的定义容易看出, 属于同一类的不动点有相同的上凸密度. 如果 (4.2.1) 作为 $C\times C$ 的相似函数压缩系, 容易看出其四个顶点作为相应压缩函数的不动点属于同一类. 但如果对 Koch 曲线取上面构造的第 2 个相似函数压缩系 (参见图 4.3.3), 那么作为不同相似压缩函数的不动点 A 和 B 就不属于同一类. 不同类的不动点不一定有相同的上凸密度. 例如, 上面 Koch 曲线的顶点 A 和 B 的上凸密度是否相同, 一直是我们关心的一个问题 (下面将回答这个问题). 一个类似的问题是, Sierpinski 垫片边上中间的那个分点与其顶点是否有相同的上凸密度? 不难证明, 不存在相似函数压缩系使 Sierpinski 边上中间那个分点是相似压缩函数的不动点.

(5) 前面说过, 当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 时, 为了证明 $E\neq E_1$, 只需证明 E 中一个特殊点有上凸密度小于 1 即可. 前面讨论那些具体例子, 如 Sierpinski 垫片、Koch 曲线等都取相应顶点进行讨论, 因为这类分形的凸闭包都是多边形, 都有顶点且存在相似压缩函数系使顶点都是相应相似压缩的不动点, 而且这些点处都有最好形状. 存在最好形状是判断一个点的上凸密度是否小于 1 的重要一步. 对一般自相似集而言, 没有这种方便可以利用. 那么, 相似压缩函数的不动点是否可以代替那些特殊分形的顶点也会给讨论带来某些方便之处? 答案是肯定的. 这也是我们提出讨论相似压缩函数的不动点的理由.

前面证明了 $C\times C$ 顶点存在最好形状. 存在 $C\times C$ 的一个相似压缩函数系以其顶点为不动点. 定理 3.4.1 的一个直接推论是, 凡满足开集条件的自相似集都存在有最好形状的点, 但由此不能得到其相似压缩函数的不动点有最好形状 (见定理 3.4.1 证明后的说明), 因为这种不动点不一定有上凸密度 1. 在一般情况下, 特别是对那些只满足开集条件的自相似集, 其任意相似压缩函数的不动点是否都有最好形状, 还是一个尚待澄清的问题. 下面讨论这个问题. 先证明下述结论.

引理 4.3.4　设 E 是由 $\{S_1,\cdots,S_m\}$ 生成的满足强分离条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E)=s$. 又 $x\in E$ 为某个相似压缩函数的不动点, 例如, $S_1(x)=x$. 则对任意 $U\subset R^n$, $x\in U$, $|U|>0$,

$$\overline{D}_c^s(E,x)\geqslant\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}.$$

证明　据假设, 显然 $x\in S_1(E)$, 而且不妨设 $U\subset S_1(E)$. 记 $S_1^k(U)=U_k$, $k>0$. 显然 $x\in U_k$, $\forall k>0$, $|U_k|\to 0(k\to\infty)$. 据比例缩放性质, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_k)}{|U_k|^s},\quad \forall K>0.$$

据上凸密度的定义, 易见

$$\overline{D}_c^s(E,x)\geqslant\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}.$$ □

注 4.3.5 这个结果对仅满足开集条件的情形亦成立, 但去掉不动点的条件就不一定成立.

定理 4.3.6 如果 E 满足强分离条件, 那么其相似压缩函数的不动点有最好形状.

证明 设 $x \in E$, $S_1(x) = x$, 即 x 为 S_1 的不动点. 下面证明 x 有最好形状. 设 E 的一个相似压缩函数系和相应相似压缩比为

$$\{S_1, \cdots, S_m(m > 1)\}; \quad \{0 < c_i < 1, i = 1, \cdots, c_m\},$$

并记

$$\varepsilon = \min_{0<i<j\leqslant m} \{|S_i(E) - S_j(E)| > 0\},$$

其中 $|S_i(E) - S_j(E)|$ 表示集合的距离. 记紧子集的集合族

$$\mathcal{B}_{x,k} = \left\{ U_x : x \in U_x,\ U_x \subset S_1(\overline{V}), \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_x)}{|U_x|^s} \geqslant \overline{D}_c^s(E, x) - \frac{1}{k} \right\}.$$

其中 V 为恰当集. 显然 $\mathcal{B}_{x,k} \neq \varnothing, \forall k > 0$, 且

$$r_{x,k} = \sup\{|U_x| : U_x \in \mathcal{B}_{x,k},\ \forall k > 0\}$$

是有界的. 我们断言

$$r_{x,k} \geqslant \frac{\varepsilon}{c_1}, \quad \forall k > 0,$$

因为否则, 注意到 $x \in S_1^{-1}(E)$, 用 $S_1^{-1}(U_x)$ 代替 U_x, 而

$$|S_1^{-1}(U_x)| = \frac{1}{c_1}|S_1(U - x)|,$$

依然有 $S_1^{-1}(U_x) \subset \overline{V}$, 重复这个程序, 直到 $|U_x| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{c_1}$ 为止, 断言得证. 注意,

$$\mathcal{H}^s(E \cap U_x) = \mathcal{H}^s(U_x).$$

在 $\mathcal{B}_{x,k}$ 中取 $\{U_x^i, i > 0\}$ 使得 $|U_x^i| \to r_{x,k}$ $(i \to \infty)$. 必要时取子序列, 可设 $U_x^i \xrightarrow{\mathcal{H}} U_{x,k} \subset \overline{V}$. 易见 $x \in U_{x,k}$, 且 $|U_{x,k}| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{c_1}$. 不妨设 $U_{x,k} \xrightarrow{\mathcal{H}} V_x$. 显然, 亦有 $x \in V_x, |V_x| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{c_1}$. 据命题 3.4.4, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap V_x)}{|V_x|^s} \geqslant \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_{x,k})}{|U_{x,k}|^s} \geqslant \overline{D}_c^s(E, x) - \frac{1}{k} = \overline{D}_c^s(E, x).$$

据命题 4.1.1,

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap V_x)}{|V_x|^s} = \overline{D}_c^s(E, x).$$

即 V_x 为 x 的最好形状. □

上面定理的证明相对而言还是比较简单的, 那是因为强分离条件带来的好处. 我们最关心的是一般情形. 下面给出一般结果. 先证明下述结论.

引理 4.3.7 设 E 是满足开集条件的自相似集, 其相似压缩函数系和相应的相似压缩比为

$$\{S_1, \cdots, S_m\}; \quad \{c_1, \cdots, c_m\}.$$

又设 $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 则 E 的相似压缩函数的不动点有正上凸密度.

证明 不妨设 x 是 S_1 的不动点. 对任意 $d > 0$, 存在包含 x 的集合 U_x, $|U_x| = d$, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_x)}{|U_x|^s} > 0.$$

这是因为 E 的任何小拷贝都有正 $\mathcal{H}$ 测度, 所以只要取 U_x 包含 x 的一个小拷贝即可, 而这总是可以办到的. 由比例缩放性质和上凸密度的定义, 易见

$$0 < \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_x)}{|U_x|^s} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(S_1^n(E \cap U_x))}{|S_1^n(U_x)|^s} \leqslant \overline{D}_c^s(E, x). \qquad \square$$

注 4.3.8 这是下面一个一般定理的简单推论, 这里给出的是直接证明.

定理 4.3.9 假设同上引理. 则 E 的任意相似压缩函数的不动点有最好形状.

证明 不妨设 $x \in E$ 是 S_1 的不动点. 显然 $x \in S_1(E)$. 点 x 可能属于多个 1 拷贝, 所以它的表示可能不唯一, 如果 x 是 $S_1(E)$ 的内点, 引理的证明是简单的. 一般情形的证明比较复杂. 下面的证明类似定理 3.4.1 的证明.

取定 x 的一个表示 $i = (i_1, i_2, \cdots)$. 因为 x 是 S_1 的不动点, 所以 $x \in S_1(E)$, 因此 $i_1 = 1$. 记

$$\mathcal{B}_k = \left\{U_k \subset R^n : x \in U_k, |U_k| > 0, \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_k)}{|U_k|^s} \geqslant \overline{D}_c^s(E, x) - \frac{1}{k}, \forall k > 0\right\}.$$

据上述引理, 至少当 k 充分大时, $\mathcal{B}_k \neq \varnothing$. 类似定理 3.4.1, 作一系列相似放大:

$$\begin{cases} T_p : \overline{V} \to R^n, \\ T_p(y) = (S_{i_1} \cdots S_{i_p})^{-1}(y), \quad \forall y \in S_{i_1} \cdots S_{i_p}(\overline{V}), \\ T_p(S_{i_1} \cdots S_{i_p}(\overline{V})) = (S_{i_1} \cdots S_{i_p})^{-1}(S_{i_1} \cdots S_{i_p}(\overline{V})) = \overline{V}. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

对 $k > 1$, 显然

$$r_k = \sup\{|U_x| : U_x \in \mathcal{B}_k\} > 0$$

是有限的. 取序列 $\{U_x^i \in \mathcal{B}_k, i > 0\}$, 使得 $|U_x^i| \to r_k$. 必要时取子序列, 可设

$$U_x^i \xrightarrow{\mathcal{H}} U_k \subset \overline{V}, \quad i \to \infty.$$

据命题 3.4.4, 易见

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_k)}{|U_k|^s} \geqslant \limsup_{k \to \infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U_x^i)}{|U_x^i|^s} \geqslant \overline{D}_c^s(E,x) - \frac{1}{k}. .$$

设 $r_k \nrightarrow 0(k \to \infty)$. 必要时取子序列, 不妨设 $r_k \to r > 0$. 类似定理 3.4.1, 易于证明, 存在 U, $x \in U \subset \overline{V}$, $|U| = r$, 使得

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = \overline{D}_c^s(E,x).$$

即 U 是 x 的最好形状.

下设 $r_k \to 0(k \to \infty)$. 这种情形的证明较为复杂, 要利用 (4.2.2) 相似放大系列, 但类似定理 3.4.1, 同样可以证明, 存在 U, $x \in U$, $|U| > 0$, 使得

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = \overline{D}_c^s(E,x).$$

即 U 是 x 的最好形状. 证明细节这里略去. 定理证毕. □

这里关于最好形状的证明依然是存在性而非构造性的. 对满足开集条件的自相似集 E, 如果能够完全决定某一点 x 的最好形状 (包括它的直径、几何形状和位置), 就可以计算 E 的 $\mathcal{H}$ 测度, 即

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} = \overline{D}_c^s(E,x),$$

其中等式左端是一个依赖最好形状的级数. 要完全决定一个点的最好形状, 涉及凸集基本理论, 特别是带约束条件的凸集基本理论, 据我们所知, 在凸集论中, 这样的理论尚未建立, 需要我们自己去建立. 另外, 还需要计算出这个点的上凸密度的值, 而这个问题几乎与计算 $\mathcal{H}$ 测度等价. 如果把 $\mathcal{H}$ 测度和这个点的上凸密度的值当作两个未知数, 那么上式给出了一个方程, 也就是两个未知数只有一个方程, 还需要另一个独立的方程. 显然, 当我们完全决定了一个上凸密度为 1 的点的最好形状, 自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度就完全决定了. 所以为了计算 $\mathcal{H}^s(E)$, 首先需要决定 (任意) 一个点的最好形状. 这就是我们重视最好形状的讨论的理由. 但是决定一个点的最好形状是非常困难的, 特别是当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 时, 甚至当 $\mathcal{H}$ 维数是整数时也是这样. 图 4.3.4 是平面多边形的情形.

定理 4.3.10 平面凸多边形除顶点外, 每一点的上凸密度均为 1, 而每个顶点的上凸密度都小于 1.

证明 以平面五边形 $ABCDE$ 为例 (参见图 4.3.4). 设 $B \subset R^2$ 可测. 据定理 1.4.6,

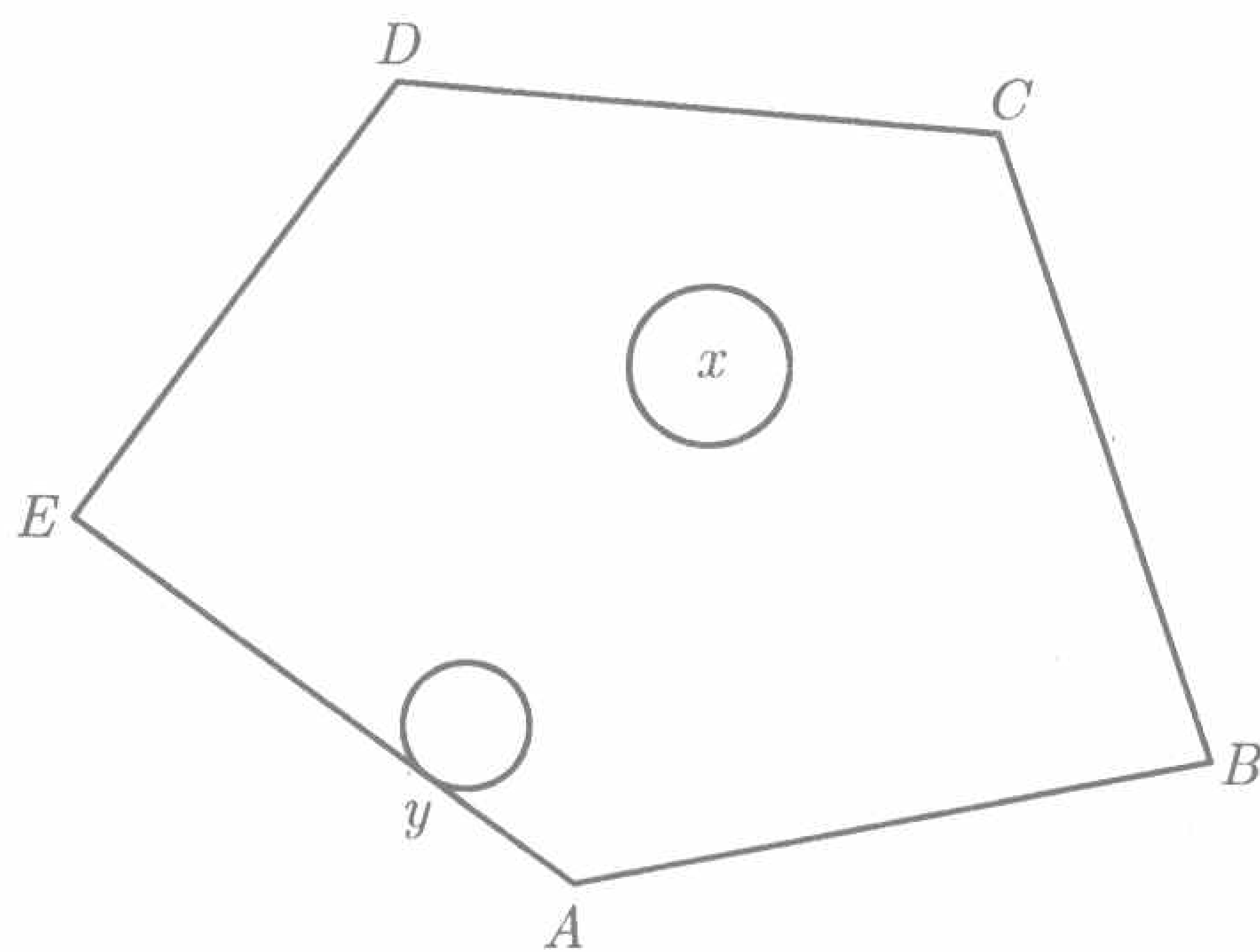


图 4.3.4　多边形

$$\mathcal{H}^2(B)=\frac{1}{4}\mathcal{L}^2(B),$$

其中等式右端是 Lebesgue 测度. 对任意内点 x, 任意给定 $\varepsilon>0$(使 $B(x,\varepsilon)\subset ABCDE,\varepsilon$ 充分小), 据上式, 显然有

$$\frac{\mathcal{H}^2(B(x,\varepsilon))}{|B(x,\varepsilon|^2)}=4/\pi\frac{\mathcal{L}^2(B(x,\varepsilon))}{|B(x,\varepsilon)|^2}=4/\pi\frac{\varepsilon^2\pi}{(2\varepsilon)^2}=1.$$

这个式子对任意的 $\varepsilon>0$ 都成立, 显然

$$\overline{D}_c^2(ABCDE,x)=1.$$

设 y 是五边形 $ABCDE$ 的 AE 边上非顶点的一点. 作充分小的实心圆, 使其在 y 点与边 AE 相切并完全包含在五边形 $ABCDE$ 内, 同样可得

$$\overline{D}_c^2(ABCDE,y)=1.$$

下面考虑顶点 A 的上凸密度. 设 $\varepsilon>0$, 且 M 是夹在 $\angle CAE$ 内, 直径为 $\varepsilon>0$ 的可测集. 注意到 $\mathcal{L}^2(M)<\dfrac{\pi\varepsilon^2}{4}$, 有

$$\frac{\mathcal{H}^2(M)}{\varepsilon^2}=4/\pi\frac{\mathcal{L}^2(M)}{\varepsilon^2}<1.$$

考虑到 ε 的任意性, 易见有

$$\overline{D}_c^2(ABCDE,A)<1.$$ □

这里只是证明了顶点处的上凸密度小于 1, 至于如何计算它们的准确值, 虽然在这种简单的情形目前也是毫无办法的, 也就是还不能决定顶点处的最好形状. 凸多边形不是严格的分形, 我们不是要讨论凸多边形, 但这种讨论对分形有某种启示作用. 这将涉及凸集理论的一块未开垦的处女地.

4.4 带约束条件的凸集优化问题

我们在前言中说过, 凸集的一个优化问题已获解决 (见定理 1.4.4), 即以给定长度为直径, 什么凸集包围的面积最大 (在高维空间有类似问题), 以及唯一性问题, 这样的问题谓之绝对优化问题. 但据作者所知, 带有某些约束条件的这类问题似乎并没有被涉及过, 我们称之为 "相对优化问题" 或 "带约束条件的优化问题", 而这样的问题却是在讨论分形问题时所需要的. 这样的问题提法同样简单, 可谓雅俗共赏, 但富有挑战性. 下面的问题是我们从分形讨论中引申出来的, 简略加以说明如下. 在每一个凸多边形上可以生成一个真正的分形 (即其 $\mathcal{H}$ 维数不是整数): 把整个凸多边形向各个角相似压缩, 可能生成具有不同 $\mathcal{H}$ 维数的满足开集条件的自相似集 (见图 4.4.1). 例如, 在正方形上, 按这种方式就可以生成不同的 Sierpinski 地毯. 这时多边形的顶点既是多边形的顶点, 也是所生成的分形的顶点. 如果不能确定其作为多边形的顶点的最好形状, 当然就更难确定其作为分形顶点的最好形状. 所有应先确定作为多边形的顶点的最好形状.

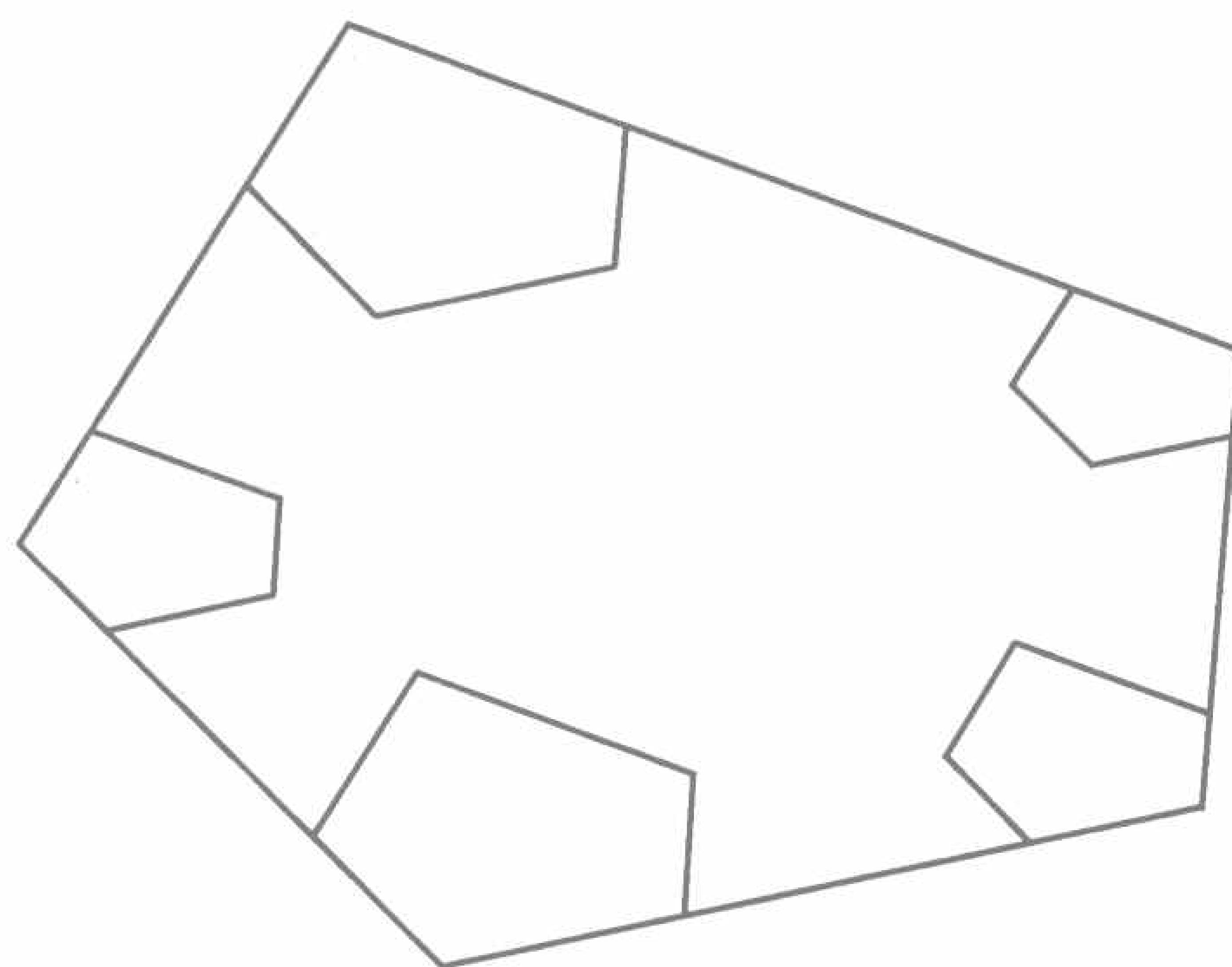


图 4.4.1 凸多边形生成的分形

关于多边形顶点的最好形状, 图 4.4.2 是戴欣荣提出的一个模型. 详细描述如下:

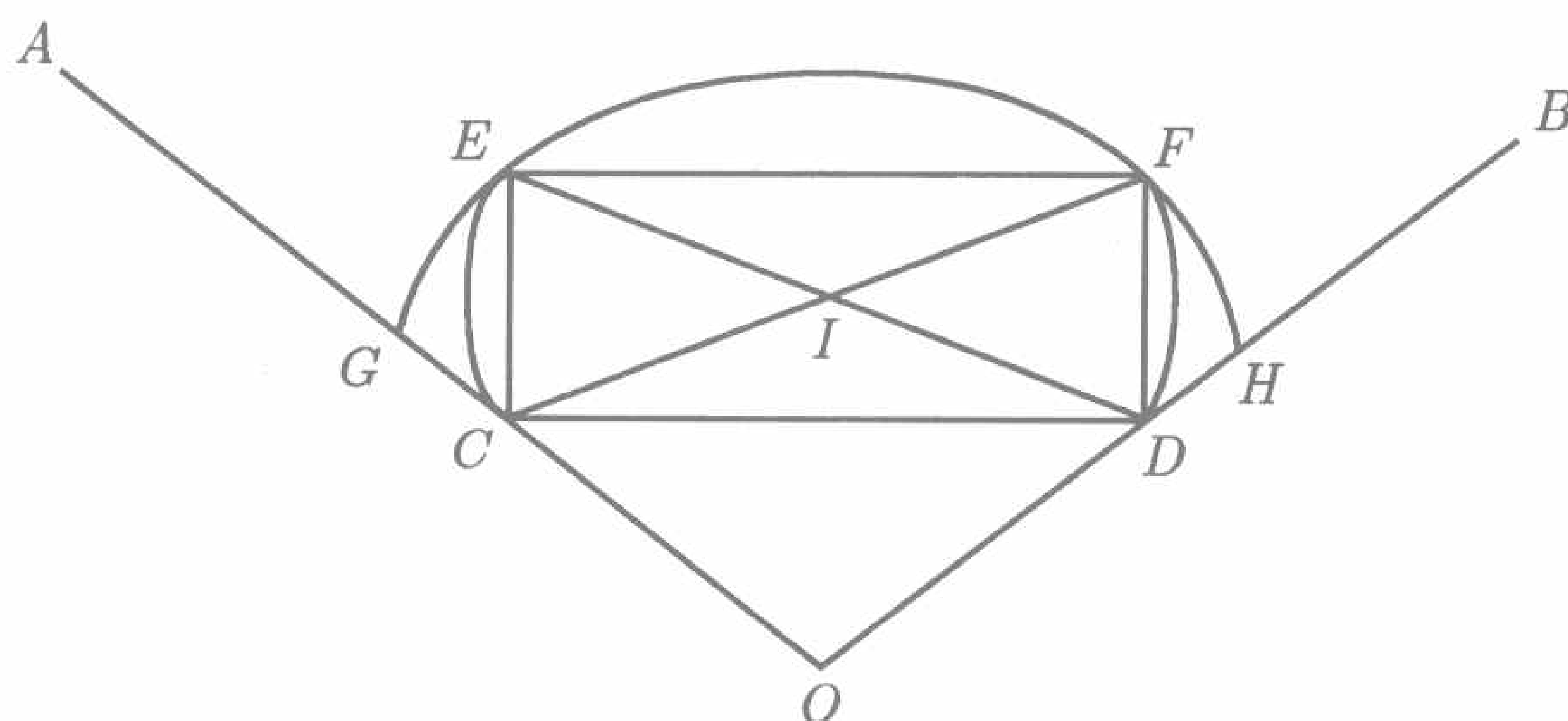


图 4.4.2 多边形顶点的最好形状

在平面上给定两条射线 OA, OB, 一般使 $\angle AOB > 60°$. 对任意给定的长度 $d>0$, 以 d 为半径以 O 为圆心作扇形 $O\widehat{GEF}H$, 使得矩形 $CEFD$ 的对角线 $|ED| = |CF| = d$. 以 ED 和 CF 的交点 I 为圆心以对角线之半为半径画圆弧, 则曲边多边形 $O\widehat{CE}\widehat{EF}\widehat{FD}O$ 即是所要求的最好形状. 这个模型当 OA, OB 成平角时刚好是圆盘, 与绝对优化问题的解吻合. 当顶点的角度不大于 $60°$ 时, 最好形状是以 O 为圆心, 以 d 为半径的扇形. 当然, 带约束条件的优化问题也存在唯一性问题.

上述模型还需一个严格的证明.

能确定多边形顶点的上凸密度的准确值当然最好, 看来目前还有困难. 但退一步下述问题会否可以解决: 多边形顶点的上凸密度是否随着角的增大而递增?

上述问题可以推广到高维, 即空间凸多面体, 除顶点外, 所有点的上凸密度均为 1, 而顶点处的上凸密度小于 1. 当然, 目前我们也不能得到顶点处上凸密度的准确值. 上述问题也可以向平面更复杂的情况推广, 如有关 Koch 曲线的问题. 我们知道 Koch 曲线上面那个顶点的上凸密度也不能确定. 我们也可以把它退化成平面问题加以考虑. 如图 4.4.3 所示是 Koch 曲线退化的相应情形. 相应问题是: 给定一个长度, 问以给定长度为直径的什么凸集包围的面积最大, 要求它包含顶点 B 且夹在 $\angle ABD$ 和 $\angle EBC$ 之内? 还有一种情况与 Sierpinski 垫片有关: 生成 Sierpinski 垫片的正三角形的中点的上凸密度不小于其顶点处的上凸密度是明显的, 但究竟是大于还是等于一直悬而未决. 我们也可以先考虑与之有关的退化情形. 同样给定一个长度, 问直径为给定长度, 什么凸集包围面积最大, 要求它包含点 O, 且夹在 $\angle AOD$ 和 $\angle BOE$ 的内部? 见图 4.4.4.

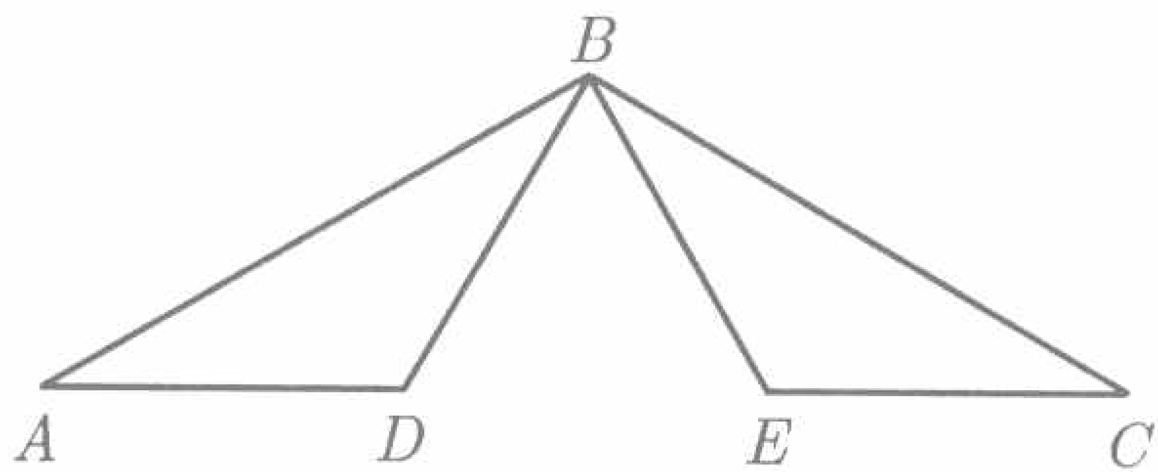


图 4.4.3　Koch 曲线顶点 (退化) 的最好形状

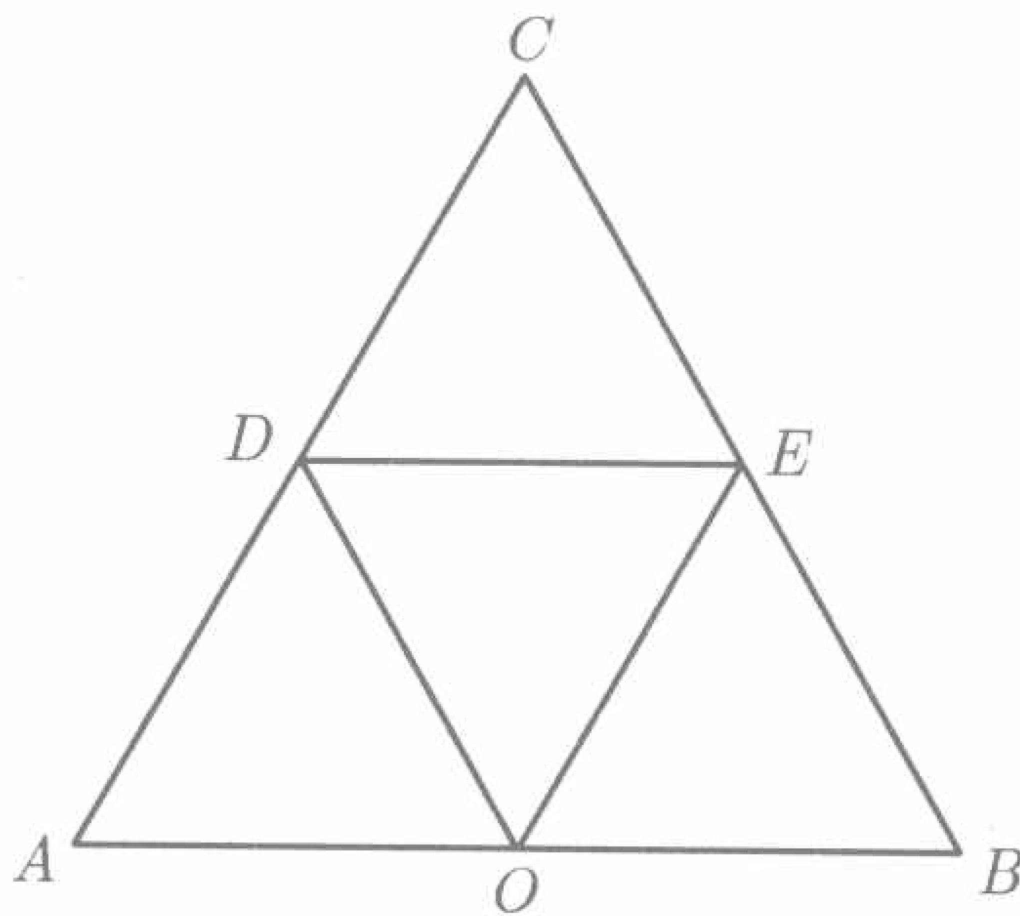


图 4.4.4　正三角形边中点的最好形状

值得一提的是, 到目前为止, 还没有一个 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 的满足开集条件的自相似集的最好形状被确定下来, 更不要说计算出其准确值. 这与目前还不能计算出任何一个 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 的满足开集条件的自相似集的 Hausdorff 测度是一致的. 文献 [20] 系统研究了 Moran 集, 首先给出一个 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 的 Moran 集的例子, 它的 $\mathcal{H}$ 测度被准确计算出来, 满足开集条件的自相似集至今没有这样的例子.

上述问题就是我们所说的带约束条件的凸集优化问题. 如果凸集理论能提供这方面的理论、方法和工具, 那将对我们的讨论大有裨益. 反过来, 如果解决了上述问题, 对凸集理论的发展也将是一个促进. 即使不从分形研究的角度, 这样的带约束条件的凸集优化问题也是重要和有意义的, 为什么在那里却还付之阙如?

从本书的思路看, 点的最好形状的确定是最基本的问题, 下面还要不断地提到 "最好形状" 这个概念.

4.5 恰 当 集

满足开集合条件的自相似集涉及一个有界开集, 称之为恰当集 (feasible set). 判定一个自相似集是否存在恰当集也不是一个简单问题. 文献 [1] 给出了一个构造性的判定条件. 关于恰当集的进一步讨论可参见文献 [2]. 本书主要讨论满足开集条件的自相似集, 也就是已假设恰当集存在. 那么恰当集是否也存在结构问题呢? 它的结构是否也影响自相似集的结构呢? 本节讨论这个问题.

所谓恰当集的结构, 这里是指

(1) 凸开集;

(2) 连通但非凸开集;

(3) 非连通开集和连通分支的基数.

这个问题在文献中不见有讨论, 因此人们对这个问题的了解还不多, 例如, 我们还不知道是否存在没有凸集作为恰当集的自相似集? 我们提出这个问题是希望了解恰当集对自相似集的结构的影响. 在第 2 章中已经证明, 当存在恰当集为凸集时, 可以用强分离条件在第一个层次意义下去逼近开集条件. 证明是很形式的, 但想法很简单, 即对一个凸集而言, 存在相似压缩, 使其像集包含在原凸集的内部. 例如, 在凸集内任取一个内点, 然后把整个凸集向这个点作相似收缩 (即各个方向收缩系数相同). 对每一个收缩系数 $r \in (0,1)$, 显然都是相似压缩, 都决定一个凸集. 当收缩系数趋于 1 时, 这些凸集在 Hausdorff 度量意义下显然趋于原凸集. 那么凸集是必要条件吗? 比凸集弱的条件是连通开集 (再弱一点是具有有限个连通分支的开集), 对以连通开集 (具有有限个连通分支的开集) 为恰当集的自相似集, 可否用满足强分离条件的自相似集去逼近? 用在凸集条件下的方法显然是行不通的, 如果可以也要另辟蹊径.

定理 4.5.1 *具有连通开集作为恰当集的自相似集可以用满足强分离条件的自相似集在第一层意义下去逼近.*

证明 下面仅给出证明纲要. 设 $E \subset R^n, n > 0$ 是满足开集条件的自相似集, V 是它的一个连通恰当集. 令 $I = [0,1]$, 即单位闭线段. 作笛卡儿积 $V \times I \subset R^{n+1}$, 它是一个以 V 为底的柱形. 在 $V \times \{1\}$, 即柱形的顶面, 取适当的一个内点, 记为 O.

以 O 为顶点在 $E\times(0)$ 上作锥体. 显然, 用平行 R^n 的超空间去截这个锥体, 只要它们相交, 其截面与 E 相似 (当与锥体顶点相交时为一点). 易见, 当平行的超空间与 R^n 充分接近时, 其截面沿第 $n+1$ 个坐标轴的垂直投影 (至多加上 R^n 上的一个平移) 可以包含在 V 内. 垂直投影显然是正交变换 (对应一个 $n\times n$ 正交方阵乘上一个非负但小于 1 的正数). 而且当平行的超平面趋于 R^n 时, 每个投影都是一个满足强分离条件的自相似集 (由上述方阵和决定原自相似集的方阵的乘积决定). 在 Hausdorff 度量意义下这些投影趋于 E, 即在第一层意义下逼近 E. □

当恰当集为具有有限连通分支的情形时, 估计亦成立, 但需严格证明. 而当恰当集具有无限连通分支时, 情况如何不得而知. 问题是这样的自相似集存在吗? 如果这样的自相似集不存在, 那么上述定理说明, 任何满足开集条件的自相似集都可以用满足强分离条件的自相似集在第一层意义下去逼近. 这种逼近保持维数的连续性是不难证明的, 但测度的连续性与否则是个待解决的问题 (主要指 E 不满足强分离条件的情形, 因为在第 2 章已经证明, 当 E 满足强分离条件时, 测度的连续性也得以保持).

4.6 最好覆盖与最好形状 (续)

前面已经讨论过这两个概念 (见 3.2 节), 本节将深入讨论这它们. 为了方便起见, 这里重新叙述它们的定义. 设 E 为满足开集条件的自相似集, $s=\dim_{\mathcal{H}}E$.

(1) 如果存在 E 的覆盖 $\{U_i,i>0\}$ 使得

$$\mathcal{H}^s(E)=\sum_i|U_i|^s, \tag{4.6.1}$$

就称 $\{U_i,i>0\}$ 是 E 的一个最好覆盖. E 显然是它本身的一个覆盖, 称之为 E 的自然覆盖.

(2) 如果集合族 $\{U_i,i>0\}$ 满足

$$\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_i U_i\right)=0, \tag{4.6.2}$$

则称 $\{U_i,i>0\}$ 是 E 的一个几乎处处覆盖. 如果它还满足 (4.6.1), 则称为几乎处处最好覆盖. 显然, 最好覆盖也是几乎处处最好覆盖.

(3) 设 $x\in E$, 定义

$$\overline{D}_c^s(E,x)=\lim_{r\to 0}\left\{\sup_{0<|U_x|\leqslant r}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U_x)}{|U_x|^s}\right\},$$

称作 E 在 x 点的上凸密度, 其中 $x\in U_x$.

如果存在 $U, x \in U, |U| > 0$ 使得

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s}, \tag{4.6.3}$$

就称 U 是 x 的一个最好形状.

(4) 如果 $U, |U| > 0$ 满足

$$\mathcal{H}^s(E \cap U) = |U|^s, \tag{4.6.4}$$

则称 U 是 E 的一个最好形状.

我们已经证明, 满足开集条件的自相似集总是存在最好形状 (定理 3.4.1), 总是存在几乎处处最好覆盖 (定理 3.4.13). 另外, 记

$$E_0 = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) = 1\}.$$

我们曾证明, E_0 是可测的且 $\mathcal{H}^s(E_0) = \mathcal{H}^s(E)$(定理 3.1.4).

4.6.1 最好覆盖和几乎处处最好覆盖

设 $\alpha = \{U_i, i > 0\}$ 是满足开集条件的自相似集 E 的一个几乎处处最好覆盖 (最好覆盖), 并设 E 的一个压缩函数系和相应的压缩比为

$$\{S_1, \cdots, S_m, m > 0\}; \quad \{c_1, \cdots, c_m\}.$$

记

$$S_i(\alpha) = \{S_i(U_j), j > 0\}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

命题 4.6.1 (1) 每一个 U_i 都是最好形状, 即

$$\mathcal{H}^s(E \cap U_i) = |U_i|^s, \quad i > 0;$$

(2) $\{S_i(\alpha), i = 1, \cdots, m\}$ 是 E 的几乎处处覆盖 (最好覆盖).

证明 (1) 据假设

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i>0} |U_i|^s.$$

据 “部分估计原理”, 有 $\mathcal{H}^s(E \cap U_i) = \mathcal{H}^s(U_i) \leqslant |U_i|^s, \forall i > 0$. 据测度的基本性质, 有

$$\mathcal{H}^s(E) \leqslant \sum_{i>0} \mathcal{H}^s(U_i) \leqslant \sum_{i>0} |U_i|^s = \mathcal{H}^s(E),$$

故

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i>0} \mathcal{H}^s(U_i) = \sum_{i>0} |U_i|^s.$$

显然, 若有某个 $j>0$ 使得 $\mathcal{H}^s(U_j)<|U_j|^s$, 上式不可能成立, 即 $\mathcal{H}^s(U_i)=|U_i|^s, \forall i>0$. 每一个 U_i 均是最好形状.

(2) 有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(S_i(E)-S_i(\alpha))&=\mathcal{H}^s\left(S_i(E)-\bigcup_{j>0}S_i(U_j)\right)\\&=\mathcal{H}^s\left(S_i\left(E-\bigcup_{j>0}U_j\right)\right)\\&=c_i^s\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_{j>0}U_j\right)=0,\quad i=1,\cdots,m.\end{aligned}$$

故

$$\mathcal{H}^s\left(E-\bigcup_{i=1}^m S_i(\alpha)\right)=\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^m(S_i(E)-S_i(\alpha))\right)=\sum_{i=1}^m\mathcal{H}^s(S-i(E)-S_i(\alpha))=0,$$

即

$$\{S_i(\alpha),i=1,\cdots,m\}$$

是 E 的几乎处处覆盖 (覆盖).

又

$$\{S_i(\alpha),i=1,\cdots,m\}=\{S_i(U_j),i=1,\cdots,m,j>0\},$$

因此

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j>0}|S_i(U_j)|^s=\left(\sum_{i=1}^m c_i^s\right)\left(\sum_{j>0}|U_j|^s\right)=\sum_{j>0}|U_j|^s=\mathcal{H}^s(E),$$

即

$$\{S_i(\alpha),i=1,\cdots,m\}$$

是 E 的几乎处处最好覆盖 (最好覆盖), 称为 α 在压缩函数系下的一次作用, 简称为 α 的一次作用. □

记 J_k 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上所有 k 排列的集合, $k>0$, 并记

$$S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)=\{S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(U_j),j>0,(i_1,\cdots,i_k)\in J_k\}.$$

下述推论简单, 证明从略.

推论 4.6.2　(1) $\mathcal{H}^s(U_i\cap U_j)=0, i\neq j$;

(2) $\{S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha),\forall(i_1,\cdots,i_k)\in J_k,k>0\}$ 是 E 的几乎处处最好覆盖 (最好覆盖), 简称 α 的 k 次作用.

关于 E_0 的结构和最好覆盖的存在性的关系, 有

定理 4.6.3 *存在最好覆盖蕴涵 $E_0 = E$, 即 E 中每一个点都有上凸密度 1.*

证明 设 $\alpha = \{U_i, i > 0\}$ 是 E 的一个最好覆盖. 据推论 4.6.2, 对 $\forall k > 0$,

$$\{S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha), \forall(i_1,\cdots,i_k) \in J_k\}$$

是 E 的最好覆盖.

设 $x \in E$. 对 α, 存在 $i_{i_1,\cdots,i_{i_k}} \in J_k, j > 0$, 使得 $x \in S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)$. 显然

$$|S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

据命题 4.3.1, $S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)$ 是最好形状, 且 $|S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, 故

$$\overline{D}_c^s(E,x) \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(E \cap S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j))}{|S_{i_1}\cdots S_{i_k}(U_j)|^s} = 1, \quad \forall k > 0.$$

即 $\overline{D}_c^s(E,x) = 1, \forall x \in E$. □

这里留下了两个问题:

(1) 上述定理的逆是否亦真, 即 $E_0 = E$ 是否蕴涵存在最好覆盖?

(2) 在什么条件下, 一个几乎处处最好覆盖是最好覆盖?

关于 (1), 至今还不能证明, 也无反例加以否定. 关于 (2), 可以作些讨论.

我们知道, 一个最好形状包含的点不一定有上凸密度 1. 这样的例子可以如下构造. 取一个离散的 Sierpinski 垫片, 记为 S $\left(\text{参见图 2.6.15, 其中 } \frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}\right)$. 易于证明, $\dim_{\mathcal{H}}(S) > 1$, 因此, 它的顶点有上凸密度小于 1. 构造 S 的一个最好形状 (定理 3.4.1), 这个最好形状是一个凸集, 它包含 S 的某级拷贝, 而这个拷贝的每一个顶点都有上凸密度小于 1. 另外, 用定理 3.4.1 的方法可以证明, 在每一个上凸密度是 1 的点处都存在最好形状 (注意, 定理 3.4.1 要求这样的点是内点, 两者无本质差别), 因而, 对任意给定的具有上密度为 1 的点, 可以构造一个几乎处处最好覆盖 (定理 3.4.13), 使这个点包含在其中某一元素内 (下面简称这个点属于这个几乎处处最好覆盖). 因此, 不属于任何几乎处处最好覆盖的点一定有上凸密度小于 1.

命题 4.6.4 *设 E 为满足开集条件的自相似集, $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$, 又 $\alpha = \{U_i, 0 < i\}$ 是 E 的一个几乎处处最好覆盖, 则*

$$x \in S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha), (i_1,\cdots,i_k) \in J_k, \forall k > 0 \Rightarrow \overline{D}_c^s(E,x) = 1,$$

其中的 $x \in S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 表示 x 属于 $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 的某个元素.

这个命题的证明与定理 3.3.3 的证明完全相似, 且易于看出, 其中的 $k > 0$, 即对 "所有正整数" 成立, 可以用对 "正整数的一个递增子序列" 成立来代替.

4.6.2 最好形状

设 $E \subset R^n, n > 0$ 是满足开集条件的自相似集, $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$. 我们已经证明, 存在 E 的最好形状, 而且 $\mathcal{H}^s(E)$ 可以写成一个级数. 但这个级数依赖最好形状的完全决定 (包括其直径、几何形状和位置), 而这是目前我们还无法做到的 (特别当 $s = \dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$ 时), 因而还不能直接用来计算 Hausdorff 测度. 无论如何, 关于最好形状存在性的证明是重要的, 特别对深入研究自相似集的结构. 我们说过, 所谓自相似集的结构, 当前主要是指 $E_1 = E$ 成立与否. 我们在文献 [35] 中曾提出猜测, 当 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$ 时, $E_0 \neq E$. 我们曾证明, Koch 曲线的端点 [42] 和 Sierpinski 垫片的顶点 [8] 有上凸密度小于 1, 即猜测成立, 还可以证明其他一些特殊情形也成立, 但一般情况如何尚不得而知, 没有反例, 也不能证明其成立. 如前所述, 为了证明这个猜测, 只需证明 E 中有某一点有上凸密度小于 1 即可, 而为此必须完全决定该点处的最好形状. 所以决定最好形状是非常重要的问题. 本节主要目的是讨论什么几何形状不能作为最好形状, 从中可以看出, 完全决定最好形状的困难性的一斑. 先证明一个引理.

引理 4.6.5 假设 E 同上, $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 设 $X \subset R^n$ 可测, 则

$$\mathcal{H}^s(E \cap X) = \inf\left\{\sum_{i>0} |U_i|^s, (E \cap X) \subset \bigcup_{i>0} U_i\right\}.$$

证明 由 $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s_\delta(E), \delta > 0$(见引理 2.3.1), 易见当 $X = \varnothing$ 时, 上式成立. 设 $X \neq \varnothing$. 由 Hausdorff 测度的定义, 存在 $E - X$ 的覆盖 $\{V_i, i > 0\}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\sum_{i>0} |V_i|^s < \mathcal{H}^s(E - X) + \varepsilon.$$

因此, 对 $E \cap X$ 的任意覆盖 $\{U_j, j > 0\}$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E \cap X) &= \mathcal{H}^s(E) - \mathcal{H}^s(E - X) \\ &\leqslant \sum_{i>0} |V_i|^s + \sum_{j>0} |U_j|^s - \mathcal{H}^s(E - X) \sum_{j>0} |U_j|^s + \varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得所求. □

下述推论是明显的.

推论 4.6.6 假设同上. 若 $X \subset R^n$ 是 E 的最好形状, 则

$$|X|^s \leqslant \sum_{i>0} |U_i|^s, \quad \forall E \subset \bigcup_{i>0} U_i.$$

定理 4.6.7 设 E 同上, 其中 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$. 则任何张角不大于 $60°$ 的扇形不能是最好形状.

证明 只考虑张角为 60° 的情形 (见图 4.6.1). 设扇形 $\angle CAB = 60°$, 直径为 $d = \overline{AC} = \overline{AB}$, 即 ABC 是一个等边直角三角形. 对任意 $x \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, 选取两点 $B(x) \in \overline{AB}, C(x) \in \overline{AC}$, 使得两线段

$$\overline{BB(x)} = \overline{CC(x)} = xd.$$

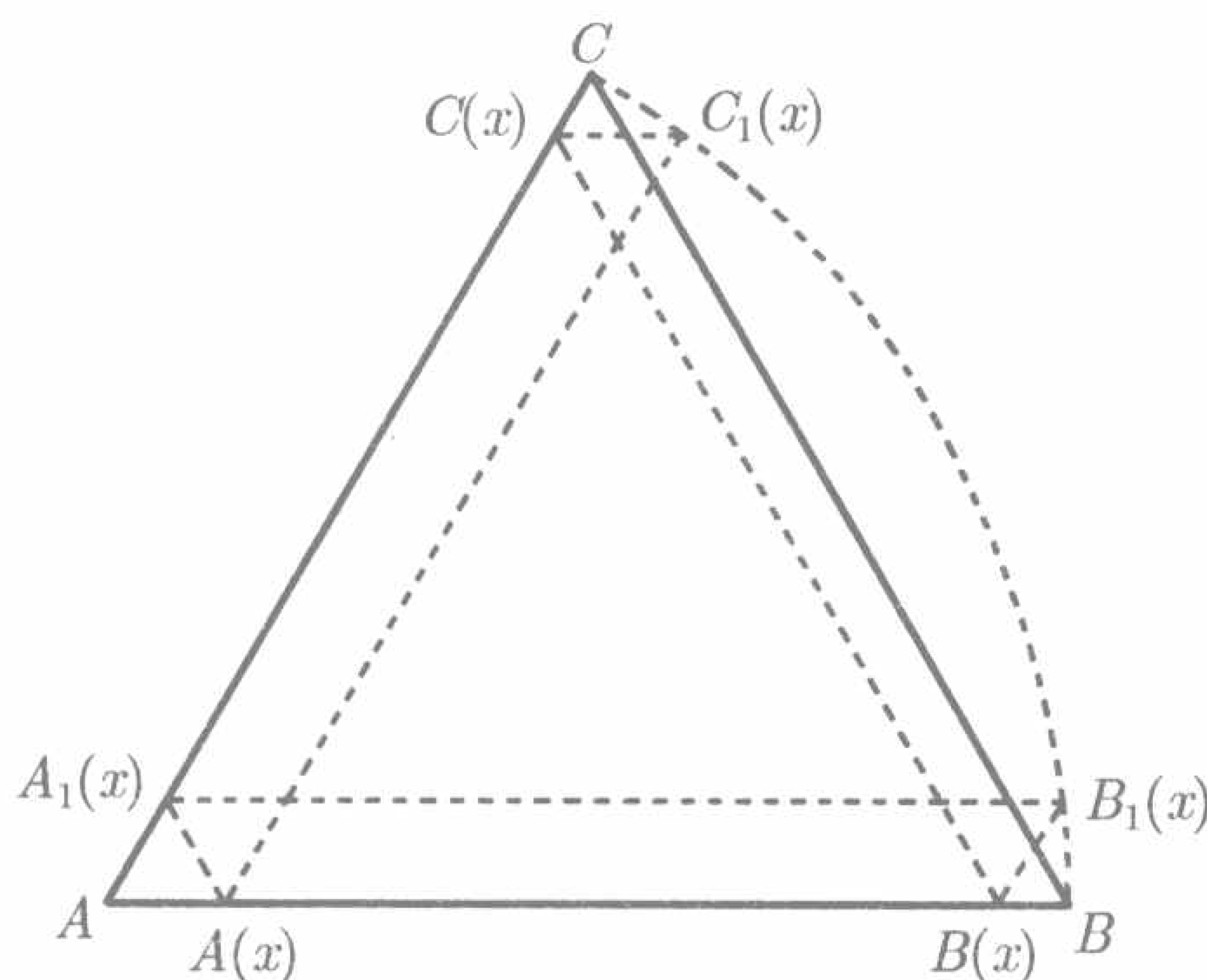


图 4.6.1 扇形 CAB 以及它的一个覆盖 $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant 4\}$, 满足 $\sum_i |U_i|^s < |CAB|^s$

令 $B_1(x), C_1(x)$ 为圆弧 $\widehat{BC}$ 上两点, 使得线段 $\overline{B(x)B_1(x)}, \overline{C(x)C_1(x)}$ 分别与 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 平行. 再选两点 $A(x) \in \overline{AB}, A_1(x) \in \overline{AC}$, 使得 $\overline{A_1(x)B_1(x)}, A(x)C_1(x)$ 分别与 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 平行. 易见

$$\overline{A(x)A_1(x)}, \quad \overline{BC}$$

平行, 且

$$|A_1(x)B_1(x)| = |B(x)C(x)| = |A(x)C_1(x)| = d - xd.$$

扇形 CAB 可以分成四部分: 等边三角形 $AA(x)A_1(x)$; 两个全等的曲边三角形

$$BB(x)B_1(x); \quad CC(x)C_1(x)$$

以及曲边六边形

$$A_1(x)A(x)B(x)B_1(x)C_1(x)C(x)A_1(x).$$

注意, 它们构成了扇形 CAB 的一个覆盖. 易于验证 $|P(x)| = d - xd$, 且三个三角形

$$AA(x)A_1(x); \quad BB(x)B_1(x); \quad CC(x)C_1(x)$$

的直径均不大于 $2xd$.

对任意实数 $s > 1$, 定义函数

$$f(x) = (d - dx)^s + 3(2xd)^s,$$

则 $f(0) = d^s$ 并且

$$f'(x) = s(d - dx)^{s-1}(-d) + 3s(2d^s x^{s-1}) < 0$$

对充分小的 $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 成立. 这蕴涵 $f(x) < d^s$ 对充分小的 $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 成立.

据引理 4.3.4, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E \cap X) &\leqslant |AA(x)A_1(x)|^s + |BB(x)B_1(x)|^s + |CC(x)C_1(x)|^s + |P(x)|^s \\ &\leqslant f(x) < d^s,\end{aligned}$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 充分小时. 这证明扇形 CAB 不可能是维数大于 1 且满足开集条件的自相似集的最好形状. □

如前所述, Sierpinski 垫片的顶点 (张角为 60°) 和 Koch 曲线的端点 (该处张角小于 60°) 有上凸密度小于 1, 即该两点处的最好形状不是相应整个分形的最好形状 (注意, 两种最好形状的区别). 那里的证明利用了相应的 Hausdorff 测度的估计, 相当繁复. 利用上述定理又得到它们的证明. 利用这个定理可以判断一大批 Hausdorff 维数大于 1 的满足开集合条件的自相似集存在上凸密度小于 1 的点. 例如, 在单位正方形 $ABCD$ 上由四个压缩函数 (压缩比可以不同, 但使其 Hausdorff 维数大于 1) 生成满足强分离条件的自相似集 (见图 4.6.2), 并使其关于一个对角线 BD 对称. 显然, 三角形 ABD 上生成相应一个自相似集, 满足开集条件, 但不满足强分离条件. 点 B 是三角形 ABD(其上的分形) 的顶点, 也是正方形 $ABCD$ 的顶点. 据上述定理, 作为三角形 ABD(其上分形) 的顶点, 其上张角小于 60°, 故它有上凸密度小于 1(注意, 该点处的最好形状即是以该点为圆心的扇形). 但作为正方形的顶点, 因其处张角大于 60°, 故不能判断其上凸密度是否为 1.

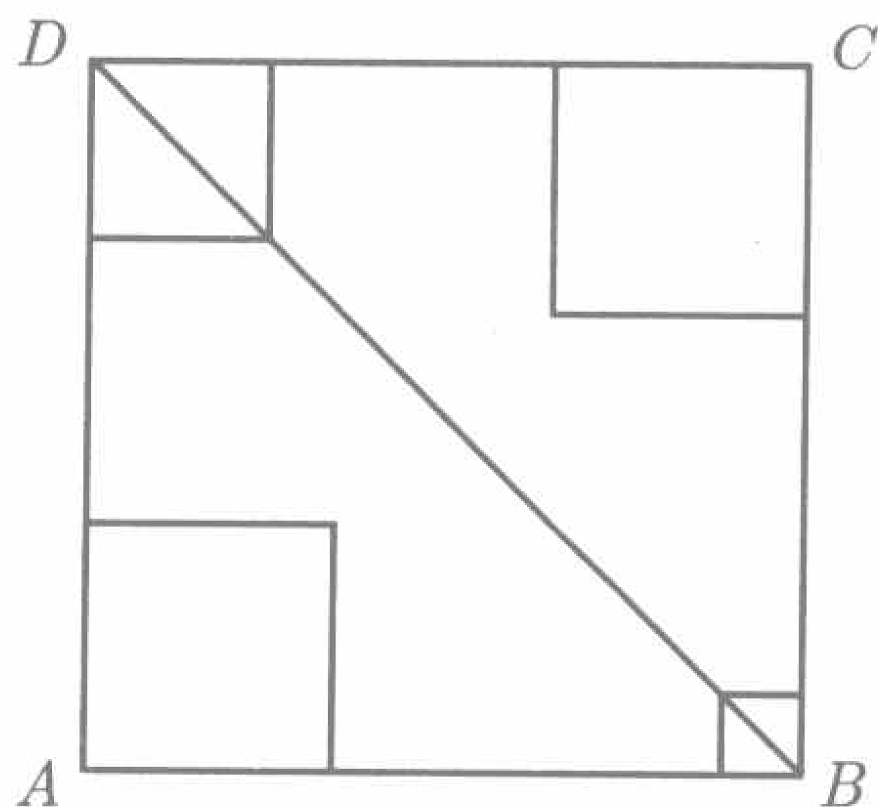


图 4.6.2　一个例子

定理 4.6.8　*设 $E \subset R^n, n > 1$ 是满足开集条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$. 则任意多面体不是它的最好形状.*

证明 [14]　设 P 是 R^n 中的凸多面体, 并设其顶点为 $A_1, \cdots, A_m$. 据引理 4.3.5, 只需证明存在 P 的覆盖 $\{U_i, i > 1\}$ 使得

$$|P|^s < \sum_{i>0} |U_i|^s$$

即可. 用 F_i 表示到顶点 A_i 的距离为 P 的直径的顶点 A_j 的集合, 即

$$F_i = \{A_j \in \{A_1, \cdots, A_m\} : \overline{|A_i A_j|} = |P|\},$$

并记

$$\alpha_i = \min\{\overline{|A_iA_j|}, 1 \leqslant i \leqslant m, A_j \bar{\in} F_i\}$$

和

$$\beta_i = \max\{\overline{|A_iA_j|}, 1 \leqslant i \leqslant m, A_j \bar{\in} F_i\}.$$

因为 P 是凸多面体, 至少存在一个 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使 $F_i \neq \varnothing$. 令

$$F = \{i : F_i \neq \varnothing\}.$$

记

$$\beta = \max\{\beta_i : i \in F\} < |P|.$$

对任意的

$$i \in F, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\min\{\alpha_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}\right),$$

以 $B_i(x)$ 表示圆心在 A_i 半径为 x 的闭球, 并以 $Q(x)$ 表示

$$P - \bigcup_{i \in F} B_i(x)$$

的凸闭包. 那么 $\{B_i(x) : i \in F\}$ 的元素两两不相交, 且易见 $Q(x)$ 也是凸多面体.

对 $i \in F$ 和 $k \neq i$, 以 $A_{i,k}$ 表示 $B_i(x)$ 中同时属于线段 $\overline{A_iA_k}$ 和 $Q(x)$ 的边界的唯一一点. 则 $Q(x)$ 刚好是点集

$$\left(\bigcup_{i \in F}\{A_{i,k}(x) : k \neq i\}\right) \cup \{A_i : i \bar{\in} F\}$$

的凸闭包, 并且当 $x < \frac{1}{2}(|P| - \beta)$ 时, $Q(x)$ 的直径 $|Q(x)|$ 等于

$$\{\overline{|A_{i,k}(x)A_{j,l}(x)|} : i \in F, j \in F_i, k, l \in \{1, \cdots, m\} - \{i, j\}\}$$

的最大值.

显然, 对任意

$$i \in F, \quad j \in F_i, \quad k \in \{1, \cdots, m\} - \{i, j\},$$

射线 A_iA_j, A_iA_k 所夹之角 $\angle A_jA_iA_{i,k} < 90^\circ$. 对任意 $i \in F, j \in F_i$, 令 $\theta_{i,j}$ 为

$$\{\angle A_jA_iA_{i,k}(x) : k \in \{1, \cdots, m\} - \{i, j\}\}$$

的最大值, 则

$$\theta = \max\{\theta_{i,j} : i \in F, j \in F_i\}$$

也小于 $90°$.

现在可以验证, 对任意小于 $\frac{1}{2}(|P|-\beta)$ 与 $\min\{\alpha_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 的正数 x 以及任意

$$k, l \in \{1, \cdots, m\} - \{i, j\},$$

$$\overline{|A_{i,j}(x)A_{j,l}(x)|} \leqslant \sqrt{(|P| - 2x\cos\theta)^2 + (2x\sin\theta)^2} = \sqrt{|P|^2 + 4x^2 - 4x|P|\cos\theta},$$

因此

$$|Q(x)| \leqslant \sqrt{|P|^2 + 4x^2 - 4x|P|\cos\theta}$$

在 x 小于 $\frac{1}{2}(|P|-\beta)$ 与 $\min\{\alpha_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 时成立.

定义函数

$$f(x) = (|P|^2 + 4x^2 - 4x|P|\cos\theta)^{\frac{s}{2}} + m(2x)^s - |P|^s,$$

其导函数

$$f'(x) = \frac{s}{2}(|P|^2 + 4x^2 - 4x|P|\cos)^{\frac{s}{2}-1}(8x - 4|P|\cos\theta) + 2^s msx^{s-1}$$

的值在 x 充分小时为负. 因 $f(0) = 0, f(x)$ 的值在 x 充分小时亦为负.

注意到

$$\{Q(x) \cup \{B_i(x) : i \in F\}$$

是 P 的覆盖, 满足

$$\sum_{i \in F} |B_i(x)|^s + |Q(x)|^s \leqslant f(x) + |P|^s < |P|^s,$$

当 x 充分小时. 定理得证. □

推论 4.6.9　*设 E 是满足开集条件的自相似集, E 的凸闭包为多面体, 则*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = s > 1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(E) < |E|^s.$$

证明　若 $\mathcal{H}^s(E) = |E|^s$, 则 E 或它的凸闭包是它自身的最好覆盖. 这显然与定理 4.6.8 矛盾. □

注意, 所谓一个集合的凸闭包是指包含该集合的最小闭凸集, 显然两者有相同的直径. 李文侠用不同方法亦给出上述推论的证明.

上述推论是我们提出的一个猜测 [35] 的特殊情况. 那里是说, 对任意满足开集条件的自相似集, 只要它的 Hausdorff 维数大于 1, 则其 Hausdorff 测度严格小于它的直径的维数次方. 要证明它, 必须证明自相似集本身不是它的最好覆盖, 即自然覆盖不是最好覆盖, 但现在我们还做不到. 值得注意的是, 能证明该自相似集有最好覆盖还不够, 因为有最好覆盖并不一定蕴涵其自然覆盖也是最好覆盖. 也就是说, 存在最好覆盖和自然覆盖是最好覆盖是否等价还不清楚.

对 Hausdorff 维数大于 1 的满足开集条件的自相似集, 上面两个定理排除了张角不大于 60° 的扇形和多面体作为最好形状的可能. 扇形和多面体相对而言是比较简单的. 还有一种简单情况, 即实心圆或球. 在同样假设条件下, 可否作为最好形状目前尚不得而知.

这里应该说明的是, 上述两个定理当维数不大于 1 时均不成立. 例如, 作离散的 Sierpinski 垫片, 亦记作 S(参见图 4.6.3), 取其中的 $r=\frac{1}{3}$. 可以直接证明 $\dim_{\mathcal{H}}(S)=1$, 利用投影的性质 [4], 还可以证明 $\mathcal{H}^1(S)=1$. 容易证明单位正三角形和它的三个相似压缩的像都是它的最好形状. 显然, 它的相似压缩像是边长为 $\frac{1}{3}$ 的正三角形, 为多边形. 另外, 每个小正三角形可以看作相应顶点上的扇形而无任何影响. 即在这种情形下, 扇形 (张角不大于 60°) 和多边形都可以是最好形状. 还可以举出其他例子, 例如 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯 (参见图 1.1.4(b)), 有 Hausdorff 维数 1 和 Hausdorff 测度 $\sqrt{2}$. 可以证明, 生成它的单位正方形和其相应的四个相似压缩像都是最好形状, 而它们都是多边形. 所以 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的情况比较多样但不是复杂. 本书主要考虑 $\mathcal{H}$ 维数大于 1 的情形.

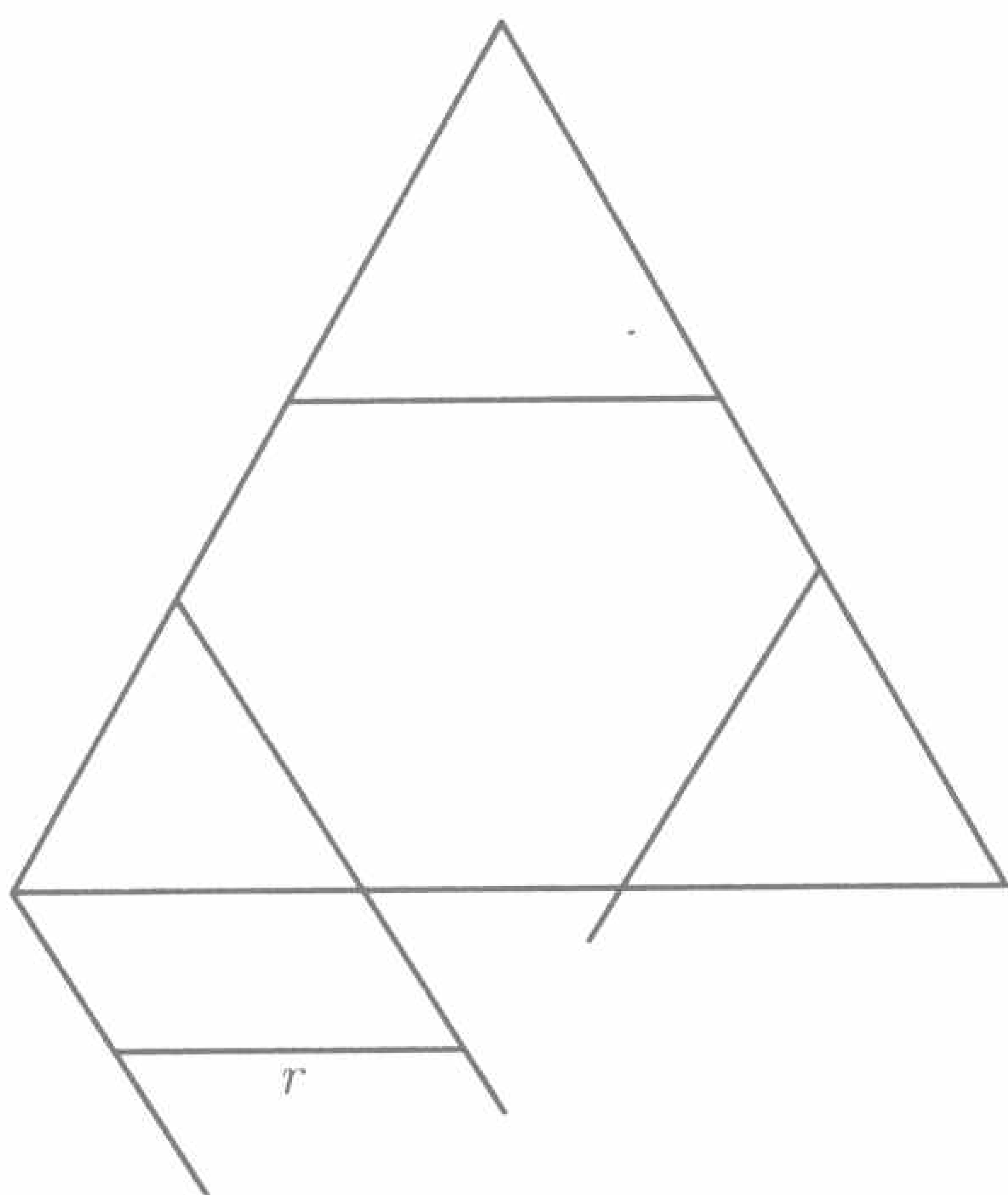


图 4.6.3 离散的垫片 $r=\frac{1}{3}$

下面证明一个与上凸密度有关的定理.

定理 4.6.10 设 S 为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯, 即中间三分 Cantor 集 C 与自身的乘积 $C\times C$(参见图 1.1.4(a)), 则其顶点处有最小的上凸密度 (注意四个顶点处上凸密度相等), 即

$$\overline{D_c^s}(C\times C,A)\leqslant\overline{D_c^s}(C\times C,x),\quad\forall x\in C\times C.$$

为了证明这个定理, 先作些准备.

建立直角坐标系, 使

$$A=(0,0);\quad B=(1,0);\quad C=(1,1);\quad D=(0,1).$$

设 $C\times C$ 的四个相似压缩函数为

$$\begin{cases} S_1\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix},\\ S_2\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix},\\ S_3\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},\\ S_4\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.6.5}$$

已知

$$\dim_{\mathcal{H}}(C\times C)=\log 4/\log 3=1.2618\cdots.$$

我们需要下述诸命题和引理.

命题 4.6.11　(1) $1.4832\leqslant\mathcal{H}^s(C\times C)\leqslant 1.5029$;

(2) $0.3708\leqslant\mathcal{H}^s(C\times C\cap S_1(\square ABCD))\leqslant 0.3757$;

(3) $0.0927\leqslant\mathcal{H}^s(C\times C\cap S_4S_1(\square ABCD))\leqslant 0.0939$.

证明参见文献 [10, 11], 从略.

引理 4.6.12　设 $U\subset R^n$, $|U|>0$, 则

$$\overline{D_c^s}(C\times C,A)\geqslant\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U)}{|U|^s},$$

特别地, $\overline{D_c^s}(C\times C,A)\geqslant\dfrac{\mathcal{H}^s(C\times C)}{|C\times C|^s}\geqslant 0.975.$

证明　注意, 对每一个 $k>0$,

$$S_1^k((C\times C)\cap U)=(C\times C)\cap S_1^k(U).$$

据前述命题, 有

$$\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U)\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap S_1^k(U))}{|S_1^k(U)|^s}=\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U)}{|U|^s},$$

所以

$$\overline{D_c^s}(C\times C,A)\geqslant\frac{\mathcal{H}^s(C\times C)}{|C\times C|^s}\geqslant\frac{1.4832}{\sqrt{2^s}}\geqslant 0.957.\qquad\square$$

引理 4.6.13 *存在紧凸子集*

$$U_A\subset[0,1]\times[0,1],\quad A\in U_A,\quad |U_A|>\frac{\sqrt{17}}{6},$$

使得

$$\overline{D_c^s}(C\times C,A)=\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap(U_A))}{|U_A|^s}.$$

所以 U_A 是顶点 A 处的最好形状.

证明 对所有 $\varepsilon>0$, 设

$$B_\varepsilon=\left\{U_A\subset[0,1]\times[0,1],|U_A|>0:\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_A)}{|U_A|^s}\geqslant\overline{D_c^s}(C\times C,A)-\varepsilon\right\},$$

其中 U_A 为紧凸集. 据上凸密度的定义, B_ε 非空.

对每一个 $k>0$, 取 $U_{A,k}\in B_{\frac{1}{k}}$. 如果 $|U_{A,k}|<\dfrac{2}{3}$, 则

$$\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_{A,k})=\mathcal{H}^s((C\times C)\cap\square AEFG\cap U_{A,k})$$

和

$$\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_{A,k})}{|U_{A,k}|^s}\leqslant\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap\square AEFG\cap U_{A,k})}{|\square AEFG\cap U_{A,k}|^s}.$$

所以 $\square AEFG\cap U_{A,k}\in B_{\frac{1}{k}}$.

易见, 如果必要, 用 $\square AEFG\cap U_{A,k}$ 代替 $U_{A,k}$, 而对下面的证明无任何影响, 可以假设 $U_{A,k}\subset\square AEFG$(见图 4.6.3). 所以 $S_1^{-1}(U_{A,k})\subset\square ABCD$. 据比例伸缩性质, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_{A,k})}{|U_{A,k}|^s}=\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap S_1^{-1}(U_{A,k}))}{|S_1^{-1}(U_{A,k})|^s}.$$

因为 A 是 S_1 的不动点, 故 $S_1^{-1}(U_{A,k})\in B_{\frac{1}{k}}$. 如果 $|S_1^{-1}(U_{A,k})|<\dfrac{2}{3}$, 对 $S_1^{-1}(U_{A,k})$ 重复上述过程. 如果还有 $|S_1^{-2}(U_{A,k})|<\dfrac{2}{3}$, 可以对 $S_1^{-2}(U_{A,k})$ 再重复上述过程. 这个过程一直重复下去, 显然存在 $n>1$, 使得 $S_1^{-n}(U_{A,k})\in B_{\frac{1}{k}}$ 且 $|S_1^{-n}(U_{A,k})|\geqslant\dfrac{2}{3}$.

为了方便, 可以假设 $|U_{A,k}|\geqslant\dfrac{2}{3},\forall k>0$, 并且据 Hausdorff 度量性质 (定理 3.4.3), 不失普遍性, 可以假设 $U_{A,k}\xrightarrow[k\to\infty]{}U_A$, 因为

$$A\in U_{A,k},\quad\forall k>0,\quad A\in U_A.$$

又 $|U_{A,k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} |U_A|$, 据命题 3.4.4, 有

$$\overline{D_c^s}(C\times C, A) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_{A,k})}{|U_{A,k}|^s} \leqslant \frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_A)}{|U_A|^s}.$$

据引理 4.3.11,

$$\overline{D_c^s}(C\times C, A) = \frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_A)}{|U_A|^s}.$$

下面证明 $|U_A| > \frac{\sqrt{17}}{6}$. 假设不然, 即 $\frac{2}{3} \leqslant |U_A| \leqslant \frac{\sqrt{17}}{6}$.

设 H, I 分别表示点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$, 且用 R_A 表示圆心在 A, 半径为 $\frac{\sqrt{17}}{6}$ 的扇形 (见图 4.6.4). 则 $|AH| = |AI| = \frac{\sqrt{17}}{6}, U_A \subset R_A$. 显然 $U_A \cap S_3(\square ABCD) = \varnothing$. 因为距离

$$d(R_A \cap S_2(\square ABCD), R_A \cap S_4(\square ABCD)) = |IH| = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{17}}{6},$$

下述两式不能同时成立:

$$U_A \cap S_2(\square ABCD) \neq \varnothing; \quad U_A \cap S_4(\square ABCD) \neq \varnothing.$$

不失一般性, 可以假设

$$U_A \cap S_2(\square ABCD) = \varnothing.$$

据命题 4.6.10, 有

$$\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_A) \leqslant \mathcal{H}^s((C\times C)\cap (S_1(\square ABCD) \cup S_4S_1(\square ABCD))) \leqslant 0.4696.$$

所以有

$$\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_A)}{|U_A|^s} \leqslant \frac{0.4696}{\left(\frac{2}{3}\right)^s} = 0.7833\cdots < 0.957.$$

这与引理 4.6.11 矛盾. □

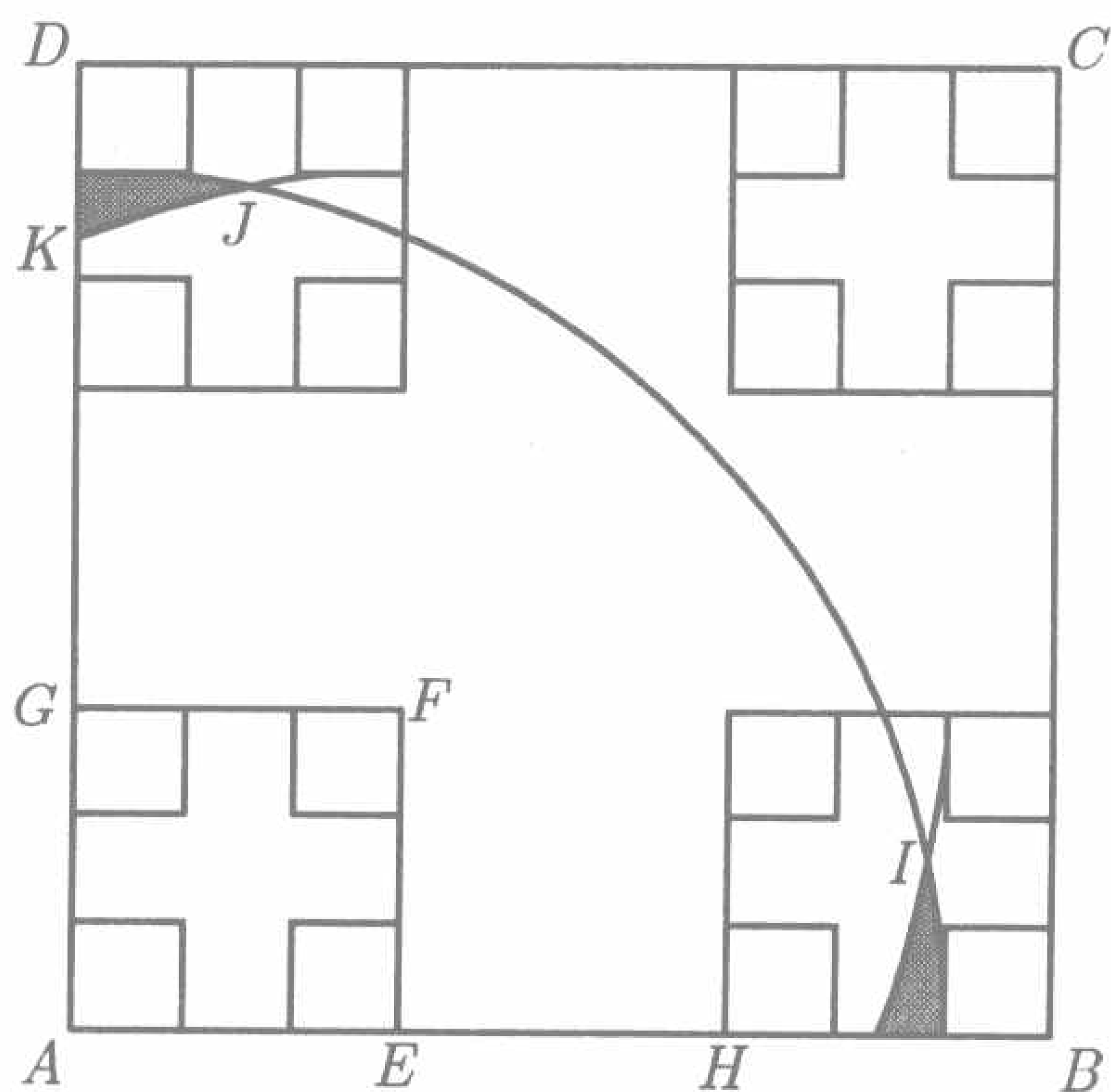


图 4.6.4　$C\times C$

设 $Y \subset R^n$ 为凸集. 称 Y 是完备的, 如果 Y 不能真包含在另一个与其有相同直径的凸集内. 即

$$x \bar{\in} Y \Rightarrow |Y \cup x| > |Y|.$$

不难证明, 任意凸集可以扩张成一个与其有相同直径的完备凸集.

推论 4.6.14　在上面引理中的最好形状 U_A 可以取成包含在 $[0,1]\times[0,1]$ 中的完备凸集.

引理 4.6.15　设 U_A 同上. 则 U_A 包含 $\triangle AEF$ 或者 $\triangle AGF$(参见图 4.6.4).

证明 首先证明 $F \in U_A$. 设不然, $F \notin U_A$. 据 U_A 的完备性, 存在点 $X \in U_A$, 使得 $|FX| > |U_A|$. 因为 $|AX| \leqslant |U_A|$, 有 $|AX| < |FX|$. 直接计算可知, 点 X 的坐标 (x, y) 满足方程

$$x + y < \frac{1}{3}.$$

这与

$$|Fx| > |U_A| > \frac{\sqrt{17}}{6}$$

矛盾. 所以 $F \in U_A$.

下面证明 $E \in U_A$ 或 $G \in U_A$. 设两者均不成立. 据 U_A 的完备性, 存在点 $M \in U_A$ 使得 $|EM| > |U_A|$. 设

$$S_A = \{P \in [0,1] \times [0,1] : d(P, A) \leqslant |U_A|\} = \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] : x^2 + y^2 \leqslant |U_A|^2\}$$

和

$$\begin{aligned} S_E &= \{P \in [0,1] \times [0,1] : d(P, E) \leqslant |U_A|\} \\ &= \left\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] : \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 \leqslant |U_A|^2\right\}. \end{aligned}$$

于是 $M \in S_A - S_E$(参见图 4.6.4, 左上角中阴影部分). 设 J 是 S_A, S_E 的边界弧的交点, 即 $J = J(x, y)$ 满足

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = |U_A|^2, \\ \left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + y^2 = |U_A|^2, \end{array}\right. \tag{4.6.6}$$

其中 $x > 0, y > 0$. 直接计算可得 J 的 x 坐标为 $\frac{1}{6}$. 因此

$$\sin \angle DAJ = \frac{1}{6|U_A|} < \frac{1}{\sqrt{17}} = 0.2425 \cdots < \sin 15^\circ = 0.2588 \cdots.$$

类似地, $G \bar{\in} U_A$ 蕴涵存在点 $N \in U_A$ 使得 $N \in S_A - S_G$, 其中 S_A 同上, 而 S_G 是图 4.6.4 右下角阴影部分. 类似可以证明 $\angle BAI < 15^\circ$, 这里 I 是 J 关于对角线 AC 的对称点.

因为 $\angle DAJ < 15^\circ, \angle BAI < 15^\circ$, 故 $\angle JAI > 60^\circ$, 故 $|IJ| > |U_A|$. 于是 $|MN| \geqslant |IJ| > |U_A|$, 与 $M, N \in U_A$ 矛盾. □

如图 4.6.5, 用 U_A^s 表示 U_A 关于对角线 AC 的对称图形. 那么, U_A^s 亦是顶点 A 处的最好形状, 且亦有 $|U_A^s| > \frac{\sqrt{17}}{6}$. 据上述引理, $U_A \cup U_A^s \supset S_1(\square ABCD) \supset S_1(C \times C)$, 即 $\{U_A, U_A^s\}$ 是 $S_1(C \times C)$ 的覆盖.

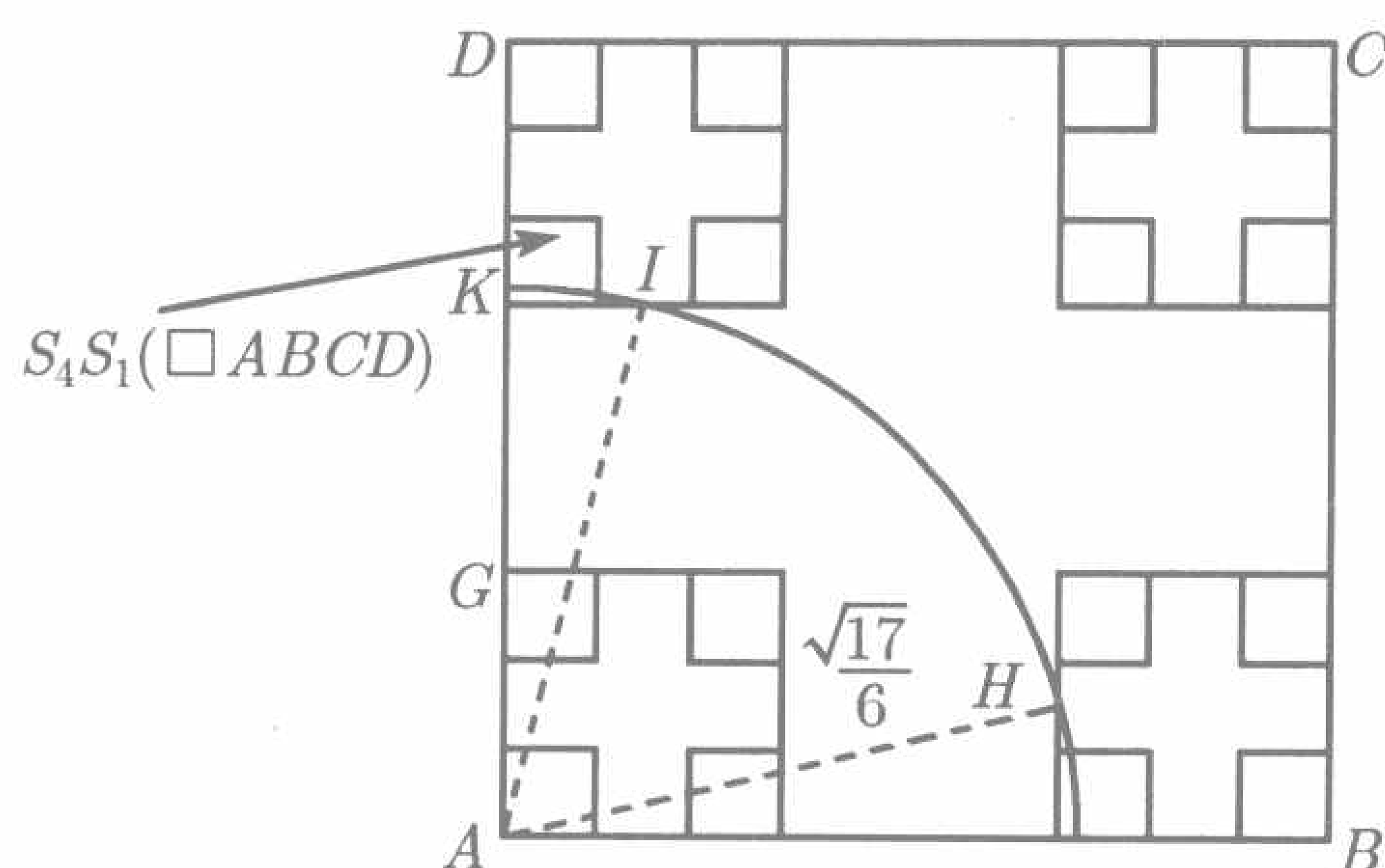


图 4.6.5　原点在 A 半径为 $\dfrac{\sqrt{17}}{6}$ 的扇形

进而, 绕 $\square ABCD$ 的中心分别把 U_A, U_A^s 旋转 $90°, 180°, 270°$, 并分别用

$$\mathrm{rot}_{90°}U_A, \mathrm{rot}_{90°}U_A^s, \mathrm{rot}_{180°}U_A, \mathrm{rot}_{180°}U_A^s, \mathrm{rot}_{270°}U_A, \mathrm{rot}_{270°}U_A^s$$

表示. 显然, 这些集合构成

$$S_2(C\times C)\cup S_3(c\times C)\cup S_4(C\times C)$$

的覆盖.

注意

$$S_1(C\times C)\cup S_2(C\times C)\cup S_3(C\times C)\cup S_4(C\times C)=C\times C.$$

集合族

$$\alpha=\{U_A, U_A^s, \mathrm{rot}_{90°}U_A, \mathrm{rot}_{90°}U_A^s, \mathrm{rot}_{180°}U_A, \mathrm{rot}_{180°}U_A^s, \mathrm{rot}_{270°}U_A, \mathrm{rot}_{270°}U_A^s\}$$

是 $C\times C$ 的一个覆盖.

显然, $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 是 k 拷贝

$$S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(C\times C)((i_1\cdots i_k)\in\{1,2,3,4\}, k>0)$$

的覆盖. 易见, $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 中的每一元素是 $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(C\times C)$ 的某一顶点处的最好形状.

定理 4.6.10 的证明　$\forall x\in C\times C, \forall k>0, x$ 包含在 $C\times C$ 的某个 k 拷贝内. 不妨设 $x\in S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(C\times C)$. 据上述讨论, x 包含在 $S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(\alpha)$ 的某个元素内, 不妨设这个元素为 $U_{x,k}$. 显然, $U_{x,k}$ 是 $C\times C$ 的某个 k 拷贝的顶点处的最好形状. 据 $C\times C$ 的强分离性, $C\times C$ 和它的各级拷贝的顶点均有相同的上凸密度. 因为 $|U_{x,k}|\leqslant|S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(C\times C)|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, 有

$$\overline{D_c^s}(C\times C,x)\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s((C\times C)\cap U_{x,k})}{|U_{x,k}|^s}=\overline{D_c^s}(C\times C,A).$$

证毕. □

下述推论简单, 证明从略.

推论 4.6.16 假设同上. 若 $\overline{D_c^s}(C\times C,A)=1$, 则 $\overline{D_c^s}(C\times C,x)=1,\forall x\in C\times C$.

注 4.6.17 (1) 在这个定理的证明中利用了一些数据, 证明方法是否适用其他类似情形值得进一步考虑. 例如, 把单位正方形均分为 9 等份, 去掉其中中间的一个小正方形的内部, 生成一个另一种 Sierpinski 地毯, 即 $\frac{8}{9}$-Sierpinski 地毯 (见图 3.3.2). 我们猜想: 其顶点处亦有最小的上凸密度, 但证明却不能完全照搬这里的方法.

(2) 我们曾提出如下猜测 [35]: 设 E 是满足开集条件的自相似集, 且 $s=\dim_{\mathcal{H}}(E)>1$, 则 $E_1\neq E$, 即 E 中至少有一点有上凸密度小于 1.

这个猜测远没有解决, 我们仅知道一些例子, 如 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线等支持其成立.

这个猜测的一个特殊情形是: $C\times C$ 至少有一点有上凸密度小于 1, 已知 $\dim_{\mathcal{H}}(C\times C)=\log 4/\log 3>1$.

据上述推论, 我们必须证明 $C\times C$ 的顶点有上凸密度小于 1. 但这个看似简单的问题目前还没有办法证明. 证明定理 4.6.10 是试图证明这个问题的努力的一个步骤, 因为若这个特殊情形不成立, 则据定理 4.6.10, $C\times C$ 的每一点都有上凸密度 1, 这可否导致与其 Hausdorff 维数大于 1 矛盾? 这似乎是一条路, 但至今也还不通.

我们试图证明这个特殊情形的另一个努力是希望完全决定其顶点处的最好形状, 为此我们曾提出猜测 (见图 4.4.2 及相应说明). 因为完全决定了顶点处的最好形状, 就可以用以对 $\mathcal{H}^s(C\times C)$ 进行估计, 即用计算它包含的各级小拷贝的数目方法去估计顶点处的上凸密度的值.

4.6.3 集合 $E-E_1$ 的结构及相关问题

设 E 是满足开集条件的自相似集, $s=\dim_{\mathcal{H}}(E)$. 其中

$$E-E_1=\{x\in E:\overline{D_c^s}(E,x)<1\}.$$

本节旨在把与上凸密度有关的问题的研究引向深入. 正如我们在本章开头时所说, 满足开集条件的自相似集是最简单的一类分形, 它们的大模样或生成机制是非常简单明了的, 不过是一个有界区域在有限个相似压缩迭代作用下的极限集, 但它们的内部结构却绝不简单. 这是一类到目前为止唯一 $\mathcal{H}$ 维数被完全确定的分形族, 这给计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度提供可能, 稍复杂一点的分形分类, 如自仿集类、Moran 集类等, 人们就无法计算和估计其 $\mathcal{H}$ 测度, 因为据 $\mathcal{H}$ 维数的定义是不能用近似的维数计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度的, 维数不准确, 所得结果不是无穷大就是零. 满足开集条件的自相似集的特例可以比较简单, 如三分中间 Cantor 集, 而其中存在可以复杂到什么程度的个例却完全不清楚. 例如, 到目前为止我们的讨论总是限于几个经典的特例, 如 Sierpinski 垫片、地毯和 Koch 曲线等, 几乎没有得到什么一般性的结论.

作者曾感慨, 一个 Sierpinski 垫片或 Koch 曲线都如同一部 "红楼梦", 可能研究几十年甚至几百年也不能彻底搞清楚. 例如, 我们知道 Sierpinski 垫片的边上的点有的是各级小拷贝的顶点, 有的不是. 我们猜想: 其顶点的最好形状与其边的交点不能是其小拷贝的顶点, 等等. 无论如何我们不能满足总是这种个别情形的研究, 而要力争走向一般研究. 下面将汇总提出一些问题, 包括上面已经提到过的和文献中已有的, 因而可能重复, 旨在把研究从特例引向一般, 不过我们往往还是要从特殊情况开始. 这里未解决的问题多过具体成果.

据定理 3.4.1, $\mathcal{H}^s(E-E_1)=0$. 正如我们前面所说的那样, 有两种情形, 即

$$E-E_1=\varnothing;\quad E-E_1\neq\varnothing.$$

对前者, 按作者的猜想, 它们仅发生在 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 的情形, 其中一定也有进一步可以讨论的问题, 但它们不是本书的重点, 我们暂时无暇顾及, 不去讨论. 而后者却引出一系列新问题, 将是我们讨论的重点. 下面主要讨论后者的情形, 我们还是先来讨论一些具体问题.

我们已经证明, Sierpinski 垫片 S 的顶点处有上凸密度小于 1. 容易证明, 生成 Sierpinski 垫片的正三角形各边的中点 (共三个, D,E,F, 它们的上凸密度相等, 参见图 4.6.6) 的上凸密度不小于其顶点处的上凸密度 (事实上, 可以用类似定理 4.3.9 的证明方法证明, 其顶点处的上凸密度最小). 那么有三种可能 (如图 4.6.6):

(1) $\overline{D}_c^s(S,A)=\overline{D}_c^s(S,D)<1$;

(2) $\overline{D}_c^s(S,A)<\overline{D}_c^s(S,D)<1$;

(3) $\overline{D}_c^s(S,D)=1$.

至今我们不能决定哪种情形成立.

下面讨论与 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯, 即 $C\times C$ 有关的一个问题.

先构造连续的 $r\times r$ 广义 Sierpinski 地毯. 对每一个 $0<r\leqslant\frac{1}{2}$, 构造 $r\times r$ 广义 Sierpinski 地毯, 并用 S_r 表示, 如图 4.6.7 所示. 易见 $S_{\frac{1}{3}}=C\times C$, 而 $S_{\frac{1}{4}}$ 为 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯, 当 $r=\frac{1}{2}$ 时则为单位正方形 $\square ABCD$. 我们考虑当 r 从 0 到 $\frac{1}{2}$ 变动时 $\mathcal{H}$ 维数、$\mathcal{H}$ 测度和 A 点处上凸密度的变化情况.

每一个 S_r 都与单边 4 符号空间同胚, 因此每两个 $S_r,S_{r'}(r\neq r')$ 都同胚, 记通过符号空间而诱导出的这个同胚为

$$\Phi_{r,r'}:S_r\to S_{r'}.$$

每一个 $\Phi_{r,r'}$ 都以 A 为不动点.

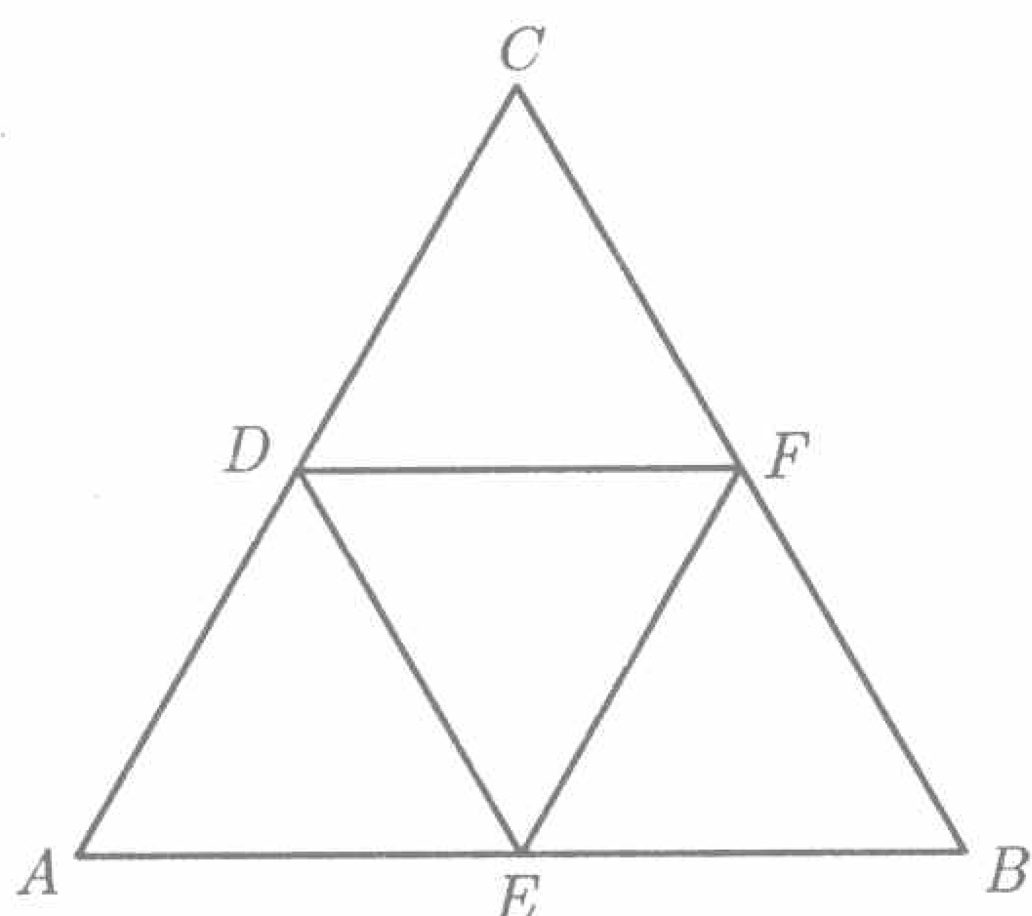


图 4.6.6 Sierpinski 垫片

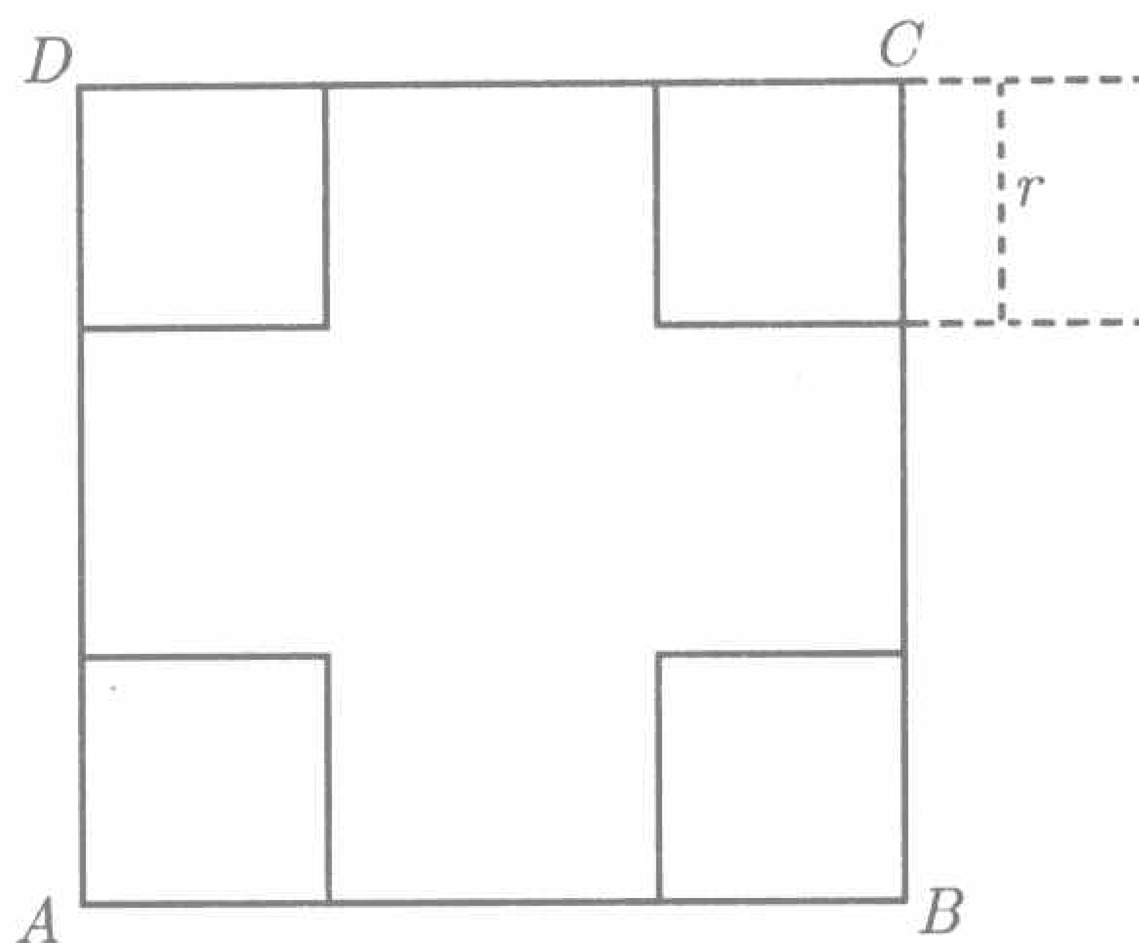


图 4.6.7 广义 Sierpinski 地毯

记 r 对应的地毯的 $\mathcal{H}$ 维数为 s_r. 我们知道, $\dim_{\mathcal{H}}(S_{\frac{1}{4}}) = 1, H^1(S_{\frac{1}{4}}) = \sqrt{2}$, 且顶点 A 的一个最好形状为单位正方形 $\square ABCD$, 即 $\overline{D_c^{s_{\frac{1}{4}}}}(S_{\frac{1}{4}}, A) = 1$. 我们已经证明 [13]

$$r_i \to r_0 \left(\leqslant \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{H}^{s_{r_i}}(S_{r_i}) \to \mathcal{H}^{r_0}(S_{r_0}). \tag{4.6.7}$$

如前所述, A 是每一个 S_r 的顶点, 且是同胚 $\Phi_{r,r'}$ 的不动点. 记 A 作为 S_r 的顶点处的最好形状为 U_r, 即

$$\frac{\mathcal{H}^{s_r}(S_r \cap U_r)}{|S_r \cap U_r|^{s_r}} = \overline{D_c^{s_r}}(S_r, A) \begin{cases} = 1, & \text{若 } 0 < r \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ \leqslant 1, & \text{若 } \dfrac{1}{2} > r \geqslant \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{4.6.8}$$

可以假设 U_r 至少与 S_r 的两个以上一级拷贝的内集相交. 考虑作为 r 的函数 $\mathcal{H}^{s_r}(S_r)$ 在

$$r \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

范围内的连续性.

因为 $\left\{U_r, r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]\right\}$ 是一致有界的, 必要时取子序列, 不妨设 $U_r \xrightarrow{\mathcal{H}} U \left(r \to \frac{1}{2}\right)$.

我们已经证明 [13], 当 $r \to \frac{1}{2}$ 时,

$$\dim_{\mathcal{H}}(S_r) \to \dim_{\mathcal{H}}(S_{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{H}^{s_r}(S_r) \to \mathcal{H}^{s_{\frac{1}{2}}}(S_{\frac{1}{2}}).$$

在 Hausdorff 度量收敛意义下, 令

$$U_r \xrightarrow[r \to \frac{1}{2}]{} U_{\frac{1}{2}}.$$

不管 $U_{1/2}$ 是否为 $\square ABCD$ 在 A 处的最好形状, 注意到 $A \in U_{1/2}$, 都有

$$\frac{\mathcal{H}^2(\square ABCD \cap U_{1/2})}{|U_{1/2}|^2} \leqslant \overline{D_c^2}(\square ABCD, A) < 1.$$

注意, 多边形的顶点的上凸密度是小于 1 的.

我们需要证明, 当 $r \to \frac{1}{2}$ 时, A 点的上凸密度是连续的, 类似文献 [13], 我们只需证明

$$\lim_{r\to 1/2} \frac{\mathcal{H}^{s_r}(S_r \cap U_r)}{|U_r|^{s_r}} = \frac{\mathcal{H}^2(\square ABCD \cap U_{1/2})}{|U_{1/2}|^2}.$$

注意到分母的极限是明显的, 只需证明

$$\mathcal{H}^{s_r}(S_r \cap U_r) \xrightarrow[r\to\frac{1}{2}]{} \mathcal{H}^2(\square ABCD \cap U_{1/2}).$$

这可以参照证明 (4.6.7) 的方法完成. 因此, 当 r 充分接近 $1/2$ 时, 有

$$\overline{D_c^{s_r}}(S_r, A) = \frac{\mathcal{H}_r^s(S_r \cap U_r)}{|U_r|^{s_r}} < 1.$$

也就是当 r 充分靠近 $\frac{1}{2}$ 时, S_r 的顶点 A 有上凸密度小于 1.

我们还没有证明 $C \times C$ 的顶点有上凸密度小于 1. 但我们猜想, 当 $\frac{1}{4} < r \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 总有

$$\overline{D_c^{s_r}}(S_r, A) < 1.$$

类似地, 我们已经证明, Koch 曲线的端点有上凸密度小于 1(共两个, O, A, 它们的上凸密度亦相等, 参见图 4.6.8). 容易证明, Koch 曲线中间那个顶点 B 处的上凸密度不小于其端点处的上凸密度 (事实上, 同样可以证明, 其端点处的上凸密度最小), 而且同样有三种可能:

(1) $\overline{D}_c^s(K, O) = \overline{D}_c^s(K, B) < 1$;

(2) $\overline{D}_c^s(K, O) < \overline{D}_c^s(K, B) < 1$;

(3) $\overline{D}_c^s(K, B) = 1$.

下述结果由朱智伟首先给出.

定理 4.6.18　$\overline{D}_c^s(K, O) < \overline{D}_c^s(K, B)$.

证明　建立直角坐标系, 以点 O 为原点, 以向上垂直方向为 y 轴, 以从 O 向左为 x 轴 (见图 4.6.8). 首先证明

$$\overline{D_c^s}(K, O) \leqslant 0.815765. \tag{4.6.9}$$

设 G 是垂直 x 轴的直线, 从原点到 G 的距离为 g. 记 $\triangle_g$ 为由 x 轴、直线 G 和射线 OB 围成的三角形. 首先证明下述断言.

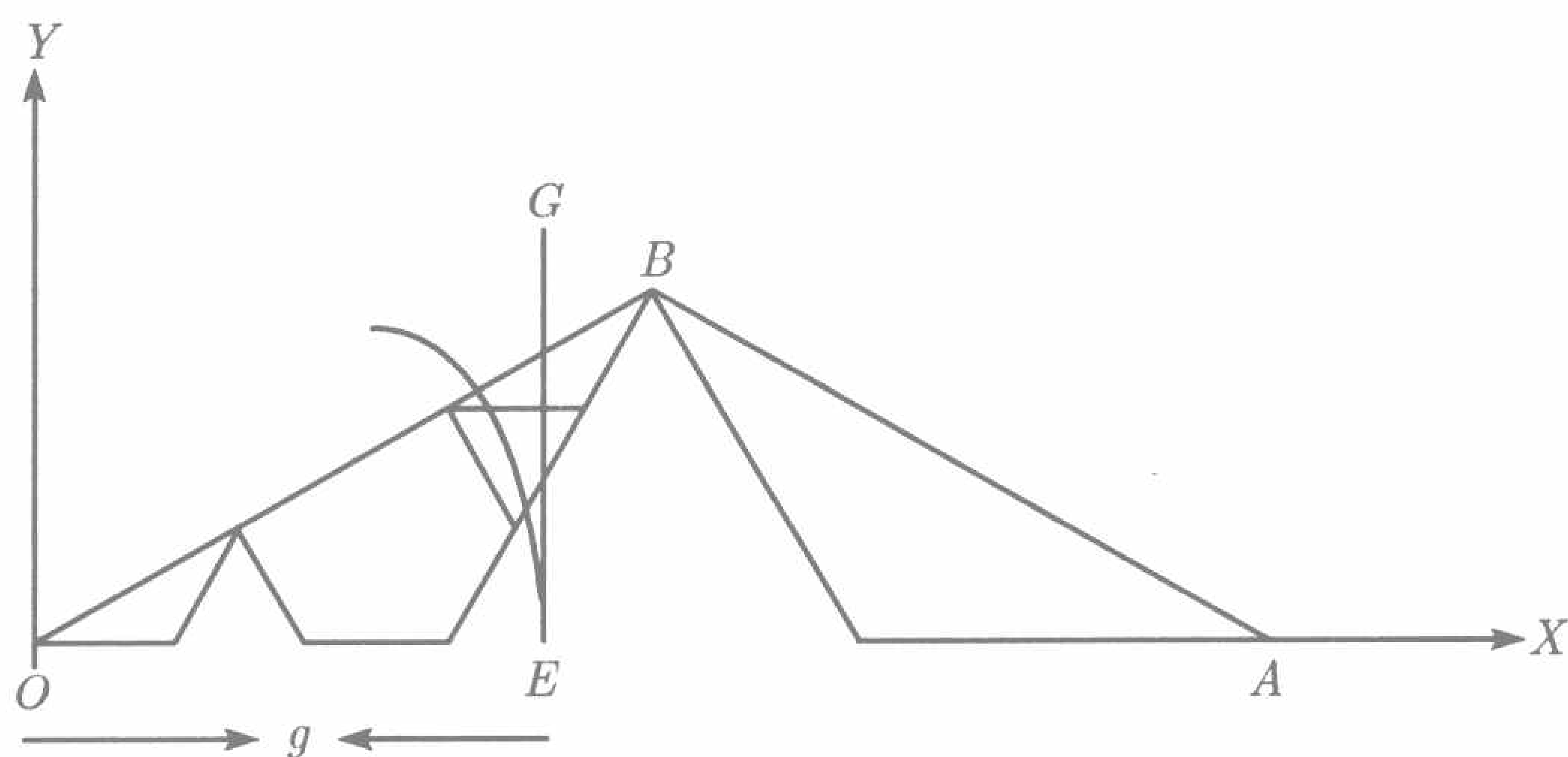


图 4.6.8 Koch 曲线

断言 1 $\dfrac{1}{g^s}\dfrac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)}<1.385, 0<g\leqslant 1, s=\dim_{\mathcal{H}}(K)=\dfrac{\log 4}{\log 3}\approx 1.2619.$

根据自相似性, 只需对 $\dfrac{1}{4}<g\leqslant 1$ 证明即可. 将单位线段分成 27 等分, 则区间 $\left[\dfrac{1}{3},1\right]$ 被分成 18 个等距区间, 用 $(a_k,a_{k+1}]$ 表示, 其中 $0\geqslant k\geqslant 18$, 而 $a_k=\dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{27}$. 当 $a_k<g\leqslant a_{k+1}$ 时, 显然有

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)\times g^s}\leqslant\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_{a_{k+1}})}{a_k^s}.$$

通过逐一计算, 除下面 (1) 和 (2) 两种情形外, 在 g 的其他范围内均有

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)\times g^s}<1.385.$$

(1) 当 $\dfrac{1}{3}<g\leqslant\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{27}$ 时,

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)\times g^s}\leqslant\frac{1/4+7/64}{(1/3)^s}\approx 1.4375.$$

(2) 当 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{27}<g\leqslant\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{27}$ 时,

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)\times g^s}\leqslant\frac{1/4+11/64}{(1/3+1/27)^s}\approx 1.4774.$$

将上述 2 个区间再各三等分, 按照同样方法进行计算, 则可得到和 $\dfrac{1}{3}<g\leqslant 1$ 同样的结果

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap\triangle_g)}{\mathcal{H}^s(K)\times g^s}<1.385.$$

断言 1 得证.

断言 2　设 $0 < |U_O| \leqslant g$, 则

$$\overline{D_c^s}(K,O) \leqslant 1.385.$$

如图 4.6.8 所示, 由于 $\angle BOX < 60°$, 易见对固定直径的集合, 使 $\dfrac{\mathcal{H}^s(K\cap U_O)}{|U_O|^s}$ 达到最大值的 U_O 是以 O 为圆心的扇形, 因此在考虑 O 点的上凸密度时, 只需考虑以 O 点为圆心的扇形.

用 U_g 表示以 O 为圆心、以 g 为半径的扇形, 则有 $\mathcal{H}^s(K\cap U_g) = \mathcal{H}^s(K\cap \triangle_g)$. 据断言 1, 有

$$\overline{D_c^s}(K,O)/\mathcal{H}^s(k) \leqslant 1.385.$$

断言 2 得证.

由断言 2, 有

$$\overline{D_c^s}(K,O) < 1.385 \times \mathcal{H}^s(K) < 1.385 \times 0.589 = 0.815765 < 1. \tag{4.6.10}$$

其中 $\mathcal{H}^s(K) \leqslant 0.589$(见定理 2.5.2).

另外, 我们已经证明 (见定理 2.6.22).

$$0.5 \leqslant \mathcal{H}^s(K). \tag{4.6.11}$$

下面完成主要结果的证明. 取五边形 $V = BG\widehat{EF}HB$ 作为包含点 B 的凸集 (见图 4.6.9), 易于计算 $|V| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. 易见

$$\mathcal{H}^s(K\cap V) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^s(K).$$

因此

$$\frac{\mathcal{H}^s(K\cap V)}{|V|^s} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^s}\mathcal{H}^s(K) = \frac{4}{2^s}\mathcal{H}^s(K) \leqslant \overline{D_c^s}(K,B).$$

代入 (4.6.10), 有

$$0.5 \times \frac{4}{2^s} = 0.833988849 \leqslant \overline{D_c^s}(K,B).$$

与 (4.6.10) 相比, 得

$$\overline{D_c^s}(K,O) < \overline{D_c^s}(K,B). \qquad \square$$

这个定理的证明严格依赖于对端点上凸密度和 $\mathcal{H}^s(K)$ 的估计, 这些估计的证明都是比较复杂的, 例如, 上面估计顶点 A 的上凸密度的上限已是不易, 至于估计 $\mathcal{H}^s(K) \geqslant 0.5$ 就更是繁杂. 能否不依赖这些估计而给出一个证明? 这需要进一步对

Koch 曲线的结构进行研究. 仔细研究图 4.6.9 可以看到, 直线 OB 上的点有些属于 Koch 曲线, 有些不属于 Koch 曲线. 我们知道, O 点的最好形状由三个要素决定, 即几何形状、位置和直径. 其中前两个已完全确定, 只有直径有待决定. 如果我们能证明 O 点的最好形状与 OB 直线的交点不属于 Koch 曲线, 就可以给出这个定理的一个不依赖上述估计的证明.

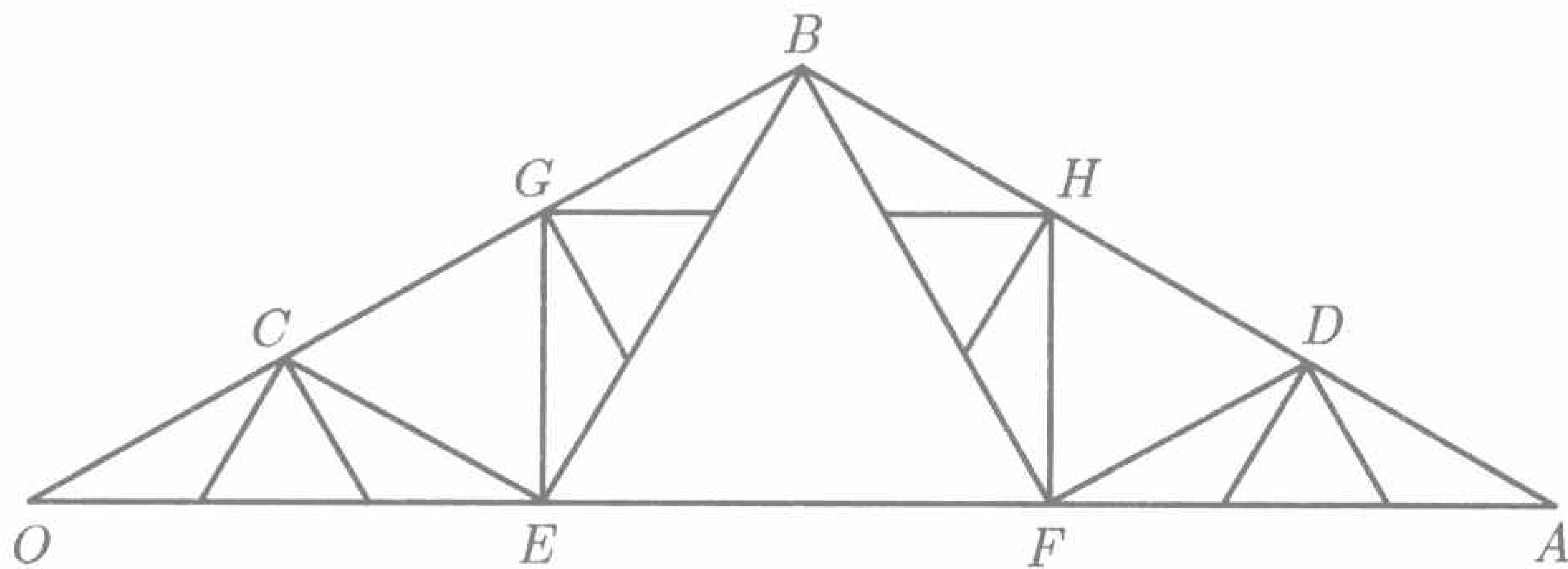


图 4.6.9 Koch 曲线

我们还不能决定 $\overline{D_c^s}(K,B)<1$? 但猜测其成立. 这是我们后面提出的一个一般猜测的特殊情形.

下面有一个一般性结果.

定理 4.6.19 设 E 为一般满足开集条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E)=s$. 则

$$\overline{D_c^s}(E,x)\geqslant\frac{1}{|E|^s}\mathcal{H}^s(E),\quad \forall x\in E.$$

证明 设 $\alpha=\{S_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 是 E 的任意一个相似函数压缩系. 设任意 $x\in E$. 存在 $\{i_1i_2\cdots i_k\cdots\}$ 使

$$x\in S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E),\quad \forall k>0.$$

由比例缩放性质, 有

$$\frac{\mathcal{H}^s(E\cap S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E\cap E))}{|S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E\cap E)|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(E\cap E)}{|E|^s}.$$

显然 $|S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}E\cap E|^s\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. 因此, 由上凸密度的定义, 有

$$\overline{D_c^s}(E,x)\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E\cap E))}{|S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}(E\cap E)|^s}=\frac{\mathcal{H}^s(E)}{|E|^s},\quad \forall x\in E.$$

当 $|E|=1$ 时,

$$\overline{D_c^s}(E,x)\geqslant\mathcal{H}^s(E),\quad \forall x\in E.$$

□

这个定理的证明虽然简单, 但它是一个一般性的结果, 指出上凸密度与 $\mathcal{H}$ 测度的一般关系, 并给出 E 中点的上凸密度的公共下限, 有重要意义. 像这样一般性的结果当然是越多越好. 可惜, 到目前为止这样的一般结果还很少.

推论 4.6.20　$\mathcal{H}^s(E)=|E|^s \Rightarrow E_1=E.$

证明　在假设条件下, 易见 $1 \geqslant \overline{D_c^s}(E,x) \geqslant \dfrac{\mathcal{H}^s(E)}{|E|^s}=1, \forall x \in E$. 故 $E_1=E$, 即上凸密度处处为 1. □

这个结果前面已经说明过, 即当 E 是其自身的最好覆盖时, 所有点的上凸密度均为 1. 但这里的证明要简单些.

Sierpinski 垫片、Koch 曲线还有几种不同的 Sierpinski 地毯是我们最熟悉的满足开集条件的自相似集, 但除了 Hausdorff 维数不大于 1 的外, 我们对它们的内部结构或微结构的了解却极其有限, 上面对 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线讨论的情形可以说是最简单的. 可否从在这种特殊情况下解决的问题中得到有关一般情况的启迪? 这应该是我们最关心的问题. 上面那些情况相对是简单的, 下面的一般问题就更复杂了, 其难度就更可想而知了.

设 $E \subset R^n (n>0)$ 是满足开集条件的自相似集, $s=\dim_{\mathcal{H}}(E)$, 并设 V 是 E 的一个恰当集. 下面的一些问题仅限于讨论 $\mathcal{H}$ 维数不小于 1 的情况.

问题 1　下面是我们提出的一个猜测 [35]

$$\{x \in E | \overline{D_c^s}(E,x)<1, \dim_{\mathcal{H}}(E)>1\} \neq \phi.$$

即当 $\mathcal{H}$ 维数不小于 1 时, 总存在上凸密度小于 1 的点.

问题 2　设 E^0 表示 E 的内点构成的集合, 亦有

$$\mathcal{H}^s(E^0)=\mathcal{H}^s(E).$$

是否有

$$x \in E^0 \Rightarrow \overline{D}_c^s(E,x)=1?$$

问题 3　决定

$$\mathrm{Card}\{x \in E : \overline{D}_c^s(E,x)<1\} \tag{4.6.12}$$

和

$$\mathrm{Card}\{r \in (0,1) : \exists x \in E, \overline{D}_c^s(E,x)=r\}, \tag{4.6.13}$$

其中 Card(∗) 表示集合的基数.

令

$$r_0=\inf\{\overline{D}_c^s(E,x), \forall x \in E\}. \tag{4.6.14}$$

是否存在 $x \in E$ 使得

$$\overline{D}_c^s(E,x)=r_0? \tag{4.6.15}$$

进而, 是否存在点 $y \in E$, 使得

$$\overline{D}_c^s(E,y) = r, \quad \forall r \in (r_0, 1]? \tag{4.6.16}$$

即 $\{\overline{D_c^s}(E,x), \forall x \in E\}$ 是连续统吗?

这里, $r_0 < 1$ 和我们提出的如下猜测是等价的:

$$s > 1 \Rightarrow E_1 \subsetneqq E,$$

即存在上凸密度小于 1 的点. 所以估计 r_0 是一个重要问题.

猜测 4.6.21 *存在 $x \in F(E)$, 使得 $\overline{D_c^s}(E,x) = r_0$, 即上凸密度的下确界总是在 E 的某个相似压缩函数系的某个相似压缩的不动处被达到.*

关于这些问题的讨论始于本书, 目前只有这样的零星结果, 一般研究还没有开始. 例如, 对 $C \times C$, 即中间三分 Cantor 集的自乘积, 我们可以给出 r_0 的下限估计. 已知 $C \times C$ 的顶点 (参见图 4.3.1) 有最小的上凸密度 (定理 4.6.10). 已经证明 (见引理 4.6.12)

$$\overline{D}_c^s(C \times C, A) \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(C \times C)}{|C \times C|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(C \times C)}{\sqrt{2^s}} \geqslant 0.957,$$

这里的 $s = \dim_{\mathcal{H}}(C \times C) = \dfrac{\log 4}{\log 3}$. 因此, 对 $(C \times C)$, 有

$$r_0 \geqslant 0.957.$$

这个值还可以改进, 但计算其准确值目前看来是无望的. 我们曾对 $C \times C$ 提出猜测, 即其中至少有一点有上凸密度小于 1. 如上所述, 如果能给出 r_0 的准确值, 这个问题就解决了. 因为当 $r_0 = 1$ 时, 说明上述猜测失败 (在一般情形, 是否有点实现其上凸密度为 r_0 是需要证明的, 但对 $C \times C$, 据定理 4.6.9 是显然的). 而当 $r_0 < 1$ 时, 则猜测成立. 当 r_0 被计算出来时, 我们还不能计算 $C \times C$ 的 Hausdorff 测度, 因为还必须完全决定顶点处的最好形状, 而完全决定顶点处的最好形状涉及一个更基本也更困难的领域: 凸集理论, 而凸集理论本身没有为我们提供理论、工具和方法, 更何况我们需要的是带约束条件的理论、工具和方法, 这在凸集理论中尚付阙如, 一切都需要分形工作者响壁虚造.

对 Sierpinski 垫片 S, 同样可以估计 r_0. 据定理 2.6.2 和定理 6.9.19, 有 (参见图 4.6.6)

$$r_0 \geqslant \overline{D_c^s}(S, A) \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(S)}{|S|^s} = \mathcal{H}^s(S) \geqslant 0.6704,$$

而且当得到了它的准确值时, Sierpinski 垫片的 $\mathcal{H}$ 测度也可计算了. 这是因为 Sierpinski 垫片是在其顶点处实现其上凸密度为 r_0 的, 而其顶点处的最好形状是可以完全决定的.

对 Koch 曲线, 有 (参见定理 2.6.22)

$$r_0 \geqslant \frac{\mathcal{H}^s(K)}{|K|^s} \geqslant \mathcal{H}^s(K) \geqslant 0.5.$$

同样, 如果得到其准确值时, Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度也可计算了.

注意, 后面两种情况 $r_0 < 1$, 因为我们已经证明它们都有上凸密度小于 1 的点.

有了 r_0 的准确值, 有些可以计算其 $\mathcal{H}$ 测度, 有些还不能, 其区别就在于最好形状能否完全决定, 由此可见最好形状的重要性.

比较简单的情形是平面上的单位正方形. 分别连它对边的中点, 把它分为四个小正方形. 它可以看作把单位正方形由四个相似压缩分别压缩成四个小正方形而生成的满足开集条件的自相似集, 其 Hausdorff 维数为 2. 这个分形记为 □. 我们知道, 除四个顶点外 (它们的上凸密度相等小于 1), 其余点的上凸密度均为 1. 因此,(4.12) 成立, 且

$$\text{Card}\{x \in \Box : \overline{D}_c^s(\Box, x) < 1\} = 4$$

和

$$\text{Card}\{r \in (0,1) : \exists x \in \Box, \overline{D}_c^s(\Box, x) = r\} = 1.$$

但正方形并不是真正的分形, 对非整数维数 (特别当其大于 1 时) 的自相似集, 这两种基数是否可以可数甚至有限? 这样的问题还不得而知, 而且很可能是非常困难的问题.

类似地, 我们还可以讨论其他一些具体情况. 但一般情形就要复杂得多. 以 Sierpinski 垫片为例, 这个问题的答案与问题 1 密切相关. 如果问题 1 的答案是肯定的, 那么只需考虑生成 Sierpinski 垫片的正三角形各边上的点, 其中成为各级拷贝的顶点的是可数, 因而其他的点是不可数的. 我们需要逐一考虑这些点的情况. 如果这些点的上凸密度都等于 1, 又分两种情况:

(1) 当 $\overline{D}_c^s(S, A) \neq \overline{D}_c^s(S, D) = 1$ 除三个顶点外, 所有其他点的上凸密度都相等, 故

$$\text{Card}\{x \in S : \overline{D}_c^s(S, x) < 1\} = 3.$$

(2) 当 $\overline{D}_c^s(S, A) = \overline{D}_c^s(S, D)$ 时,

$$\text{Card}\{x \in S : \overline{D}_c^s(S, x) < 1\}$$

为可数无穷多.

在其他情况, 就要考虑内点上凸密度小于 1 的点的基数和边上非各级拷贝的顶点的那些点的情形,

$$\text{Card}\{x \in S : \overline{D}_c^s(S, x) < 1\}$$

可数无穷多, 也可能不可数无穷多. 总之, 如果问题 1 是否定的和各边上非各级小拷贝的顶点不一定都有上凸密度为 1, 那情况就要复杂得多.

对我们相对熟悉的 Sierpinski 垫片, 情形尚且如此, 一般情形的复杂程度可想而知.

问题 4 *当 $\mathcal{H}$ 维数不小于 1 时, $\mathcal{H}^s(E) < |E|^s$?*

这是我们在文献 [35] 中提出的一个猜测, 如我们在前面所说, 它只在当 E 的凸闭包是多面体时被证明, 一般情形尚不得而知.

问题 5 *E 存在最好覆盖 $\Leftrightarrow E_1 = E$?*

这也是文献 [35] 中的一个猜测. 我们已经证明 $\Rightarrow$ 成立, 其逆如何也不得而知.

问题 6 *上凸密度的几何意义?*

这也许是最重要的一个问题. 上面讨论的问题归根结底都与这个问题有关, 可以说至今我们对它的理解还是非常肤浅的. 例如, 上凸密度可以区分哪些点的微结构, 不能区分哪些微结构?

设 $E \subset R^n (n > 0)$ 是满足开集条件的自相似集, $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$. E 中的两点可以有相同的上凸密度, 也可以不同. 这显然和它们的微结构有关.

显然, Sierpinski 垫片的顶点与其边上的中点有不同的微结构, 后者又与其内点有不同的微结构. 所以三者有不同的上凸密度是正常的, 但我们却不能证明情况真的如此. 据上凸密度的定义, 我们证明过, 具有相同微结构的两点有相同的上凸密度. 是否有相同的上凸密度的两点, 它们的微结构一定相同? 如我们前面所说, 答案是否定的. 正如我们前面所说的, 在平面正方形中, 内点和非顶点的边界上的点显然有不同的微结构, 但却有相同的上凸密度 (参见图 4.3.1, 只要把其中的多边形换成正方形即可, 正方形可以看成满足开集条件的自相似集, 具有 $\mathcal{H}$ 维数为 2). 但正方形不是真正的分形. 对真正的分形, 当其 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时也有例子说明其成立. 如 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯, 其中所有点均有上凸密度 1, 但显然并不是所有点有相同的微结构. 而对维数大于 1 的情形还不清楚, 我们还需要一个证明或一个反例.

人们对上凸密度几何意义理解肤浅, 在探讨有关上凸密度的问题时, 就会看不清症结所在, 就会感到无从下手. 人们所遇到的困难可能皆源于此. 对上凸密度的理解有待一些基本发现.

问题 7 *$\mathcal{H}$ 维数对自相似集结构的影响.*

我们知道, 对满足开集条件的自相似集而言, 当其 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时, 有些 $\mathcal{H}$ 测度是可以计算的, 但当其 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时, 至今一个也计算不出. 也可以用最好形状的语言叙述, 即对前者, 有些最好形状可以完全决定, 而对后者却一个也不能完全决定.1 这个数值似乎是一个拐点, $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时, 自相似集的

结构虽然多样但有些可能简单些, 而一经越过这个拐点, 毫无例外地变得复杂起来! 总之, $\mathcal{H}$ 维数是否大于 1, 对自相似集的结构肯定有重要影响, 只是我们对此可以说一无所知. 解决这个问题的关键是找到上凸密度定义与维数的联系, 我们至今还没有发现两者之间的任何联系. 我们上面说过, 对上凸密度的理解有待一些基本发现, 如果找到这种联系, 就可以说有了重要的 "基本发现".

目前我们只知道, 当 $\alpha \geqslant 1$ 时函数 $f(x) = x^\alpha$ 为凸函数, 而当 $\alpha \leqslant 1$ 为凹函数. 对凸函数, 有下述不等式:

$$\begin{gathered}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)^\alpha \leqslant \lambda_1 x_1^\alpha + \cdots + \lambda_n x_n^\alpha, \\ \forall x_1, \cdots, x_n \geqslant 0, \quad \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1], \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.\end{gathered} \tag{4.6.17}$$

一种特殊的情形是

$$\left(\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right)^\alpha \leqslant \frac{1}{n}(x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha). \tag{4.6.18}$$

而当函数为凹函数时, 上面不等号相反 [15].

这种不等式的不同刻画了 $\alpha > 1$ 和 $\alpha \leqslant 1$ 的差别, 其对探讨问题 6 肯定有帮助, 只是我们目前对其一无所知.

目前, 我们可以说关于满足开集条件的自相似集的研究还仅限于个别研究, 比如, 我们讨论的总是那几种我们熟悉的分形, 一般研究还远远没有开始, 至今几乎没有任何可以称道的一般结果. 我们说满足开集条件的自相似集是最简单的一类分形, 那只是说, 它们的生成机制简单明了的, 而不是说这类分形都是简单的, 其中可以包含怎样复杂的个体, 我们是远远不清楚的. 所以关于满足开集条件的自相似集的研究还任重道远.

猜测 4.6.22　*$\overline{D_c^s}(E,x) < 1, \forall x \in F(E), \dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$, 其中 $F(E)$ 为 E 的所有可能相似压缩函数系的相似压缩的不动点的集合.*

我们已经证明 $\overline{F(E)} = E$. 如果这个猜测成立, 那么我们对满足开集条件的自相似的内部结构的了解就加深一步. 至少我们知道在 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$ 的情形下, 其上凸密度小于 1 的点的基数至少为可列无穷多.

附　录　A

集合论和点集拓扑是分形几何的基础学科之一, 是阅读本书的不可缺少的基础. 读者应该已经学过集合论初步和点集拓扑. 为了本书的封闭性, 我们附加这样一个附录, 目的是把本书所需要的有关基本知识扼要地重述一遍, 便于读者随时翻阅. 为了减少篇幅, 除对本书特别重要的概念, 如 Hausdorff 度量等, 我们大都采取叙而不证的策略, 读者可参阅文献 [28].

A.1　集合论基础

集合论是分析数学的基础, 在一般点集拓扑书中均有简要论述, 可供非专业人员学习和参考. 本附录只就本书最需要的内容略加论述, 目的是满足本书的封闭性要求, 有兴趣的读者可参阅有关文献.

A.1.1　集合

集合是一个不可精确定义的概念, 一般是指具有某种性质的个体的总和. 我们说给定一个集合, 就是说任给一个个体, 可以判断这个个体在或者不在这个集合里面. 如实数集合、有理数集合等. 一般, 集合用大写字母表示, 如 U, V, X, Y 等. 集合中的个体称作“点”或“元素”, 用小写字母表示, 如 a, b, x, y 等. 点 x 在集合 X 中记为 $x \in X$. 一个集合 X 中的点全包含在另一个集合 Y 中, 就说前者是后者的子集, 记为 $X \subset Y$. 如用 R 表示全体实数的集合, 用 Q 表示全体有理数的集合, 有 $Q \subset R$.

A.1.2　集合的运算

给定两个集合 U, V. 这两个集合的所有点一起构成一个新的集合, 称作它们的并或和, 记作

$$U \cup V.$$

它们的公共点也构成一个新集合, 称作它们的交或交集, 记作

$$U \cap V.$$

类似地, 可以定义任意多集合的并和交. 在 U 中而不在 V 中的点所构成的新集合称作两者的差, 记作

$$U - V.$$

如果 $U \subset X$, 称 $X-U$ 为 U(相对于 X) 的补集. 不含任何点的集合称作空集, 记为 $\varnothing$.

下述集合运算的基本性质易由定义直接推出.

交换律:

$$U \cup V = V \cup U,$$

$$U \cap V = V \cap U.$$

结合律:

$$(U \cup V) \cup W = U \cup (V \cup W),$$

$$(U \cap V) \cap W = U \cap (V \cap W).$$

分配律:

$$(U \cup V) \cap W = (U \cap W) \cup (V \cap W),$$

$$(U \cap V) \cup W = (U \cap W) \cup (V \cap W).$$

De Morgan 律:

$$A-(V \cup W) = (U-V) \cap (U-W),$$

$$A-(V \cap W) = (U-V) \cup (U-W).$$

上述诸性质亦可向无穷多个集合情形推广.

A.1.3 一一对应和集合的基数

给定两个集合 X, Y. 如果存在一种规律 f, 使得对 X 中的每一点唯一存在 Y 中的点与之对应, 就称这个规律是 X 到 Y 的一个单值对应, 记作

$$f: X \to Y.$$

如果 $x \in X, f(x)=y$, 称 y 是 x 的像点, x 称为 y 的一个原像点. 如果 Y 中每一点的原像点都是唯一的, 就称 f 是单的. 如果 Y 中每一点都是 X 中某一点的像点, 就称 f 是满的或在上的. 若 $X_0 \subset X, X_0$ 的全体像点的集合称为 X_0 的像集, 记作 $f(X_0) \subset Y$. 若 $Y_0 \subset Y$, 称 X 中所有 Y_0 中点的原像点的集合为 Y_0 的原像集, 记为

$$f^{-1}(Y_0) \subset X.$$

一个既单又满的对应称为一一对应. 一一对应在集合之间建立一种关系, 记作 $\sim$. 这是一种等价关系, 即满足

(1) 反身性: $X \sim X$;

(2) 对称性: $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$;

(3) 传递性: $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

因此 $\sim$ 把集合分成等价类, 同一类集合彼此之间存在一一对应, 不同类集合之间不存在一一对应. 每一类集合赋予一个称作“基数”或“势”的概念相联系: 相同类集合有相同的基数, 不同类集合基数不同. 有限集合的基数就是它包含点的个数. 因此, 基数就是“点的个数”的推广. 有限集合的基数有大小的区别. 一般集合的基数也有广义大小的区别.

给定两个集合 X, Y. 如果存在从 X 到 Y 的单的对应, 我们就说 X 的基数不大于 Y 的基数. 用 $C(X), C(Y)$ 表示集合 X, Y 的基数, 并用

$$C(X) \preceq C(Y)$$

表示 X 的基数不大于 Y 的基数. 如果从 X 到 Y 有一个单对应, 反过来, 从 Y 到 X 也有一个单对应, 即

$$C(X) \preceq C(Y), \quad C(Y) \preceq C(X),$$

我们就说它们有相同的基数, 记作 $C(X) = C(Y)$. 下述定理说明这种说法的合理性.

定理 A.1.1 *如果从 X 到 Y 有一个单对应, 反过来, 从 Y 到 X 也有一个单对应, 则 $X \sim Y$, 即它们之间存在一一对应.*

这就是著名的 Contor-Bernstein 定理, 证明可参见文献 [28].

有限集合的基数可以比较大小. 下述两个定理说明一般集合的基数也可以比较大小, 而且基数无上限.

定理 A.1.2 *设 X, Y 为任意两个集合, 则*

$$C(X) \preceq C(Y), \quad C(Y) \preceq C(X)$$

两者至少一个成立.

设 X 是任意集合. 用 2^X 表示 X 的所有非空子集的集合.

定理 A.1.3 $C(X) \prec C(2^X)$.

证明参见文献 [28].

最“小”的无限集合是可数集或可列集, 其代表集合是有理数集 Q, 其基数一般记为 $\aleph_0$. 如果承认连续统假设, 其次的无限集是实数集合代表的集类, 其基数记为 $\aleph$, 包括著名的 Cantor 集等. 在实变函数中已证明后者的基数大于前者的基数. 基数严格大于可数集的基数的集合可统称不可数集. 在动力系统中的所谓混沌集一般都是不可数的, 非平凡自相似集也都是不可数的. 从集合论角度, 不可数集合的规模较大. 本书最关心的下述问题.

设 E 是满足开集条件的自相似集. 已知 $E - E_1$ 是 $\mathcal{H}^s$“小集合”, 即

$$\mathcal{H}^s(E - E_1) = 0$$

其中 s 是 E 的 $\mathcal{H}$ 维数. 那么从集合论的角度, 它的规模如何? 就是它可能与 E 有相同的基数吗? 即是不可数集合吗? 这个问题对探讨自相似集的结构复杂性具有基本理论意义. 如果 $E-E_1$ 可以是不可数的, 那么就需要进一步探讨这个集合的 $\mathcal{H}$ 维数性质.

A.2　点集拓扑基础

A.2.1　拓扑空间

设 $\mathcal{X}$ 是一个非空集合, $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集合族, 满足如下性质:

(1) $\mathcal{X}, \varnothing \in \mathcal{T}$;

(2) $\forall \alpha \in \Gamma,\ A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \in \mathcal{T}$, 即对任意并的封闭性;

(3) $A_i \in \mathcal{T},\ i=1,2,\cdots,m(m>0) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{T}$, 即对有限交的封闭性.

子集合族 $\mathcal{T}$ 称作 $\mathcal{X}$ 的一个拓扑, $(\mathcal{X},\mathcal{T})$ 一起称作拓扑空间, 即一个非空集合赋予一个拓扑构成一个拓扑空间, 有时简单写作拓扑空间 $\mathcal{X}$. $\mathcal{T}$ 中的元素称作该拓扑空间的开集, 开集的补集称作闭集.

设 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$. 易证集合族

$$\mathcal{T}_0 = \{\mathcal{X}_0 \cap A : A \in \mathcal{T}\},$$

即 $\mathcal{T}$ 中每一元素与 $\mathcal{X}_0$ 相交所构成的集合族, 是 $\mathcal{X}_0$ 上的一个拓扑, $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{T}_0\}$ 叫做 $\mathcal{X}$ 的子空间.

子集合族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 称作 $\mathcal{T}$ 的或拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的一组基, 如果 $\mathcal{T}$ 中每一个元素可以写成 $\mathcal{B}$ 中元素的并, 即对 $\forall A \in \mathcal{T}$, 都有

$$A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}, B\subset A} B.$$

满足一定条件的子集合族可以唯一决定一个拓扑以它为基[28]. 所以为了定义拓扑, 有时先决定一组基.

如果一个拓扑空间有一个基数可数的基, 那么称作满足第二可数性公设空间.

A.2.2　度量空间

设 $\mathcal{X}$ 是一个非空集合. 记

$$\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to R$$

为 $\mathcal{X}$ 上一个非负 2 元函数, 如果满足:

(1) $x, y \in \mathcal{X}$, 则 $\rho(x,y) \geqslant 0; \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$(非负性);

(2) $x, y \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(y,x)$(对称性);

(3) $x, y, z \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$(三角不等式).

那么称 ρ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个度量. 显然, 对一个给定集合, 拓扑和度量都不是唯一的.

一个非空集合 $\mathcal{X}$ 加上其上一个度量 ρ 称作度量空间, 记作 $(\mathcal{X}, \rho)$. 当我们说 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间, 就是说其上一个度量已经给定.

在集合 $\mathcal{X}$ 上定义度量 ρ 之后, 就可以定义球形邻域:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathcal{X} : \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

最常见的拓扑空间和度量空间是欧氏空间

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n), x_i, y_i \in R, i = 1, \cdots, n, n > 0\}.$$

在 R^n 上通常度量为

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

对这个度量而言, 球形邻域即是通常的开球. 当然, 如果度量变了, 球形邻域的形状也跟着改变.

设 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间, 容易证明, 以 $\mathcal{X}$ 中每一点的所有正半径的球形邻域, 即

$$\mathcal{B} = \{B(x, r), \forall x \in \mathcal{X}, \forall r > 0\}$$

作为空间的子集合族构成的基, 可以得到 $\mathcal{X}$ 的一个拓扑, 由这个拓扑得到的拓扑空间称作由该度量所决定的拓扑空间. 所以度量空间也是拓扑空间. 反过来, 一个拓扑空间是否可以由一个度量决定是一个复杂问题, 叫做拓扑空间的度量化问题, 超出本附录的范围, 我们不作讨论. 给定一个集合, 其上不同的度量可以决定同一个拓扑空间, 这样的度量称作等价度量. 这是读者应该注意的问题, 因为 Hausdorff 维数与测度的定义依赖度量, 也就是它们不是等价度量不变的.

一个度量空间 $(\mathcal{X}, \rho)$ 称作完备的, 如果其上任意 Cauchy 序列收敛到其上一点. 序列 $\{x_i\}$ 称作 Cauchy 序列, 如果对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i, j > N$, 有

$$\rho(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

$R^n (n > 0)$ 是完备的.

定理 A.2.1 设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是完备度量空间. 如果紧致集合序列 $\{E_i, i > 0\}$ 满足

$$E_i \neq \varnothing, \quad \forall i > 0, \quad E_i \supseteq E_j, \quad i < j,$$

则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \varnothing.$$

证明从略.

Sierpinski 垫片、Sierpinski 地毯的生成过程用到了这个结果.

设 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是拓扑空间之间的单值对应. 我们说 f 在 $x \in \mathcal{X}$ 是连续的, 如果对 $f(x)$ 的任意邻域 $U_{f(x)}$, 存在 x 的邻域 U_x, 使得 $f(U_x) \subset U_{f(x)}$. 在每一点都连续时, 称其为 $\mathcal{X}$ 上的连续映射.

当 $\mathcal{X}$ 是度量空间时, 称函数 $f : \mathcal{X} \to R$ 是一致上半连续的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in \mathcal{X}$, 都有

$$\rho(y, x) < \delta \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

同样可以定义一致下半连续函数. 当同时是一致上半连续和一致下半连续时, 称 f 是一致连续的. 当我们讨论 Hausdorff 测度的连续性时, 需要下述定理.

定理 A.2.2 一致上 (下) 半连续等价一致连续.

证明从略.

设 X 是一个拓扑空间. 下面引进几个名词.

设子集合 $X_0 \subset X$. 称 X_0 在 X 中稠密, 如果 $\overline{X_0} = X$; 称 X_0 在 X 中无处稠密或疏子集, 如果 X_0 的闭包的内集是空集; X_0 称为第一纲集, 如果它是可数个无处稠密子集的并, 不是第一纲集的集称为第二纲集; 在完备度量空间中, 包含一个可数个稠密开集的交集的集称作 Baire 剩余集, Baire 剩余集是稠密的.

稠密子集的补集也可以是稠密的. 例如, 在直线上有理数的集合是稠密的, 其补集即无理数的集合也是稠密的, 但 Baire 剩余集的补集不再是稠密的. 我们可以称无处稠密子集、第一纲集等为拓扑“小集合”.

A.3 紧 致 性

设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑空间. 子集合族 $(U_\alpha, \alpha \in \Gamma)$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个覆盖, 如果 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha = \mathcal{X}$. 当其中元素都是开集时, 称作开覆盖. 拓扑空间 $\mathcal{X}$ 称作紧致的, 如果它的每一个开覆盖都有有限的子覆盖. 空间的一个子集是紧致的, 如果它作为子空间是紧致的. 一般分形, 特别是自相似集大都是紧致的. 例如, 有界闭线段是紧致的, 这是数学分析中一个著名定理. 一般地, $R^n (n > 0)$ 中有界闭子集是紧致的. 但并非任意度量空间中有界闭子集都是紧致的. 紧致性是拓扑空间乃至整个分析数学最重要的概念之一.

本书用到 Lebesgue 数概念, 简介如下.

定义 A.3.1 *设 $(\mathcal{X},\rho)$ 是一个度量空间, α 是它的一个开覆盖. 实数 $\lambda>0$ 称作 α 的一个 Lebesgue 数, 如果 $A\subset\mathcal{X},|A|<\lambda\Rightarrow$ 存在 α 中元素包含 A.*

不是任何度量空间的任何开覆盖都存在 Lebesgue 数, 但是有

定理 A.3.2 *紧致度量空间的每一个开覆盖都有 Lebesgue 数.*

几乎在任何一本点集拓扑的书中都可以找到它的证明, 这里从略.

关于紧致性概念本书用得不是很多, 我们就介绍到这里为止.

A.4 连 通 性

设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑空间. 两个子集 A, B 叫做隔离的, 如果

$$A\cap\overline{B}=\varnothing;\quad B\cap\overline{A}=\varnothing.$$

拓扑空间叫做不连通的, 如果它可以写成两个非空隔离子集的并. 不是不连通的拓扑空间叫做连通空间. 空间的子集叫做连通的, 如果作为子空间是连通的.

$R^n(n>0)$ 是连通的. $[a,b]$ $(a<b)$ 作为 R 的子集是连通的. Sierpinski 垫片和 Koch 曲线都是连同的, 但 Sierpinski 地毯一般都是不连通的. $[a,b]\cup[c,d]$ $(a<b<c<d)$ 是 R 的非连通子集. 拓扑空间每一个点作为子空间是连通的. 拓扑空间 $\mathcal{X}$ 中两点 x,y 叫做连通的, 如果 $\mathcal{X}$ 有一个连通子集同时包含这两点. 在 $\mathcal{X}$ 上的点间建立关系 $\sim$:

(1) $x\sim x$(反身性);

(2) $x\sim y\Rightarrow y\sim x$(对称性);

(3) $x\sim y,\ y\sim z\Rightarrow x\sim z$ (传递性).

(1) 和 (2) 是明显的, (3) 亦不难验证. 因此, 这是一个等价关联, 从而把 $\mathcal{X}$ 的点分成不相交的类, 同一类中的点彼此连通, 不同类不相交. 每一个这样的类称作空间的一个连通分支. 容易证明, 连通分支作为子集是连通的, 且每一个连通分支都是闭集. 每一个连通分支只包含一个点的空间称作全不连通空间. Cantor 集是全不连通的.

一个点 $x\in\mathcal{X}$ 叫做局部连通的, 如果 x 的每一个邻域都包含一个连通邻域. 每一点都局部连通的空间叫做局部连通空间. 连通和局部连通是不同的概念, 两者无蕴涵关系, 即连通不一定局部连通, 反之亦然. 局部连通但非连通的例子容易构造, 连通但非局部连通的例子略显复杂[28].

设 $x,y\in\mathcal{X}$. 从 x 到 y 一条路径, 是指如下一个连续映射:

$$\begin{cases}\mathbb{f}:[0,1]\to\mathcal{X},\\ \mathbb{f}(0)=x,\\ \mathbb{f}(1)=y.\end{cases}$$

如果存在这样的一条路径, 我们就说 x 和 y 是路径连通的. 一个拓扑空间叫做路径连通的, 如果其中每两点都是路径连通的. 容易证明 Sierpinski 垫片是路径连通的. 路径连通蕴涵连通, 反之不真[28].

在拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的点间建立关系 $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x$ 与 y 路径连通. 容易证明

(1) $x \sim x$ (反身性);

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$(对称性);

(3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$(传递性).

(1) 是明显的, (2) 的证明也简单. (3) 的证明如下:

设从 x 到 y 和从 y 到 z 的两条路径分别是

$$\begin{cases} \mathbb{f}_{1} : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ \mathbb{f}_{1}(0) = x, \\ \mathbb{f}_{1}(1) = y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{f}_{2} : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ \mathbb{f}_{2}(0) = y, \\ \mathbb{f}_{2}(1) = z. \end{cases}$$

定义从 x 到 z 的路径为 [28]

$$\begin{cases} \mathbb{f} : [0,1] \to \mathcal{X}, \\ \mathbb{f}(\mathbb{t}) = \mathbb{f}_{1}(2\mathbb{t}), t \in [0,1/2], \\ \mathbb{f}(\mathbb{t}) = \mathbb{f}_{2}(2\mathbb{t} - 1), t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

类似连通分支的情形, 也可以定义路径连通分支.

A.5　Hausdorff 度量

在拓扑空间上可以讨论极限, 这是读者比较熟悉的. 通常我们都是讨论点列或数列的极限. 在分形几何中除了点列或数列的极限外, 人们还需讨论集合序列的极限. 例如, Koch 曲线的生成过程中就涉及集合序列的极限, 此外, 在讨论最好形状的存在性时也要用到这个概念.

本节就来讨论在 Hausdorff 度量意义下紧致集合序列的极限问题. Hausdorff 度量也是较早就有的概念, 不过在通常拓扑书中讨论得不多, 读者未必很熟悉这个概念, 但它在分形几何中有重要应用. 为简单起见, 在欧氏空间 $R^n(n > 0)$ 上进行讨论, 对一般完备度量空间, 下述讨论无本质区别. 设 $A, B \subset R^n$. 用 $B(A,\varepsilon)$ 表示集合 A 的 ε 邻域, 即

$$B(A,\varepsilon) = \{y \in R^n : d(A,y) < \varepsilon\},$$

其中 $\varepsilon > 0$, 而 $d(A, y)$ 表示点 y 到 A 的距离.

用 $\mathcal{C}$ 表示 R^n 中全体非空紧致子集构成的集合族. 定义

$$\begin{cases} \rho: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to R, \\ \rho(A, B) = \inf\{\delta : (\overline{B(A, \delta)} \supset B; \overline{B(B, \delta)} \supset A)\}. \end{cases}$$

从直观上, ρ 的值越小, 相应两个集合越接近.

定理 A.5.1 ρ 是 $\mathcal{C}$ 上一个完备度量, 称作 Hausdorff 度量.

证明 先证明 ρ 是度量. 据定义, 度量的前两个条件容易验证, 留下的是证明三角不等式. 设 A, B, $C \in \mathcal{C}$. 据紧致性, 显然有 $\rho(A, B) < \infty$. 设 $\varepsilon > 0$. 如果 $x \in A$, 则存在 $y \in B$, 使得

$$d(x, y) < \rho(A, B) + \varepsilon.$$

因此, 存在 $z \in C$, 使得

$$d(y, z) < \rho(B, C) + \varepsilon.$$

这证明 A 包含在 C 的 $\rho(A, B) + \rho(B, C) + 2\varepsilon$ 邻域的闭包内. 类似地, C 包含在 A 的 $\rho(A, B) + \rho(B, C) + 2\varepsilon$ 邻域的闭包内. 所以

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C) + 2\varepsilon,$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

下面证明完备性[4].

设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{C}$ 上一个 Cauchy 序列. 下面证明, 在 Hausdorff 度量意义下这个序列收敛, 即有极限点 (紧致集合). 记

$$A = \{x : \exists x_k \in A_k,\ \forall k > 0,\ x_k \to x\}.$$

不难证明, A 是紧致的, 即有界闭集. 下面证明在 Hausdorff 度量意义下, A_n 收敛到 A.

给定 $\varepsilon > 0$. 据 Cauchy 序列的定义, 存在正整数 N, 使得当 $n, m \geqslant N$ 时, 有 $\rho(A_n, A_m) < \varepsilon/2$. 下面证明, 当 $n > N$ 时, $\rho(A_n, A) \leqslant \varepsilon$.

如果 $x \in A$, 则存在序列 (x_k), $x_k \in A_k$, $\forall k > 0$, 使得 $x_k \to x$. 因此, 对充分大的 k, 有 $d(x_k, x) < \varepsilon/2$. 因为 $\rho(A_k, A_n) < \varepsilon/2$, 所以存在 $y \in A_n$, $d(x_k, y) < \varepsilon/2$ 和

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_k) + d(x_k, x) \leqslant \varepsilon.$$

这证明 $A \subseteq \overline{B(A_n, \varepsilon)}$.

现设 $y \in A_n$. 选择整数 $k_1 < k_2 < \cdots$ 使得 $k_1 = n$ 且 $\rho(A_k, A_m) < 2^{-j}\varepsilon$, $\forall m \geqslant k_j$. 定义序列 $\{y_k\}, y_k \in A_k$ 如下: 对 $k_j < k < k_{j+1}$, 选取 $y_k \in A_k$, 使得 $d(y_{k_j}, y_k) < 2^{-j}\varepsilon$. y_k 是 Cauchy 序列, 因此收敛. 设 x 是它的极限点, 因而 $x \in A$. 有

$$d(y, x) = \lim_k d(y, y_k) < \varepsilon,$$

所以 $y \in \overline{B(A, \varepsilon)}$, 这证明 $A_n \subseteq \overline{B(A, \varepsilon)}$, 所以 $\rho(A, A_m) \leqslant \varepsilon$, 即 (A_n) 收敛到 A. □

设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中序列. 如果在 Hausdorff 度量意义下它收敛到 A, 以后写作

$$A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$$

或

$$A \to_{\mathcal{H}} A.$$

命题 A.5.2 设 $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$, 则 $|A_n| \to |A|$, 且当 $x \in A_n$, $\forall n > 0$, 则 $x \in A$. 这里 $|*|$ 表示集合的直径.

证明从略.

定理 A.5.3 $\mathcal{C}$ 上一致有界的无限集合 $\mathcal{B}$ 有在 Hausdorff 度量意义下在 $\mathcal{C}$ 内收敛的子序列.

证明 首先在 $\mathcal{B}$ 内构造一个 Cauchy 序列. 设 $\{E_{1,i}\}_i$ 是 $\mathcal{B}$ 中任意不同的集合序列. 下面对 $k > 0$ 归纳地进行证明. 设下述结论对小于 k 的情形已成立. 对 $k > 0$, 定义 $\{E_{k-1,i}\}_i$ 的一个无限子序列 $\{E_{k,i}\}_i$ 如下: 设 $\mathcal{B}_k$ 直径最大不超过 $1/k$ 的闭球的有限集合, 它们覆盖 $\mathcal{B}$ 中全体成员的并, 由一致有界的假设这是可以做到的. 每一个 $E_{k-1,i}$ 都与这些球的特殊的组合相交 (不再与其他球相交) 因为 $\mathcal{B}_k$ 是有限的, 故它的所有不同数目的不同组合也是有限的, 所以存在无限多 $\{E_{k-1,i}\}_i$ 的子集合族 $\{E_{k,i}\}_i$, 它们全都与 $\mathcal{B}_k$ 中 (存在但不一定唯一, 可任选) 一组相同的球的组合 (即并) 相交. 设 F 是这些球的并, 那么对所有的 i, 有

$$E_{k,i} \subset F \subset \overline{B(E_{k,i}, 1/k)}),$$

所以对所有 i, j, 给定 $\rho(E_{k,i}, E_{k,j}) \leqslant 2/k$ 时, $\rho(E_k, F) \leqslant 1/k$. 令 $E_i = E_{i,i}$, 立得

$$\rho(E_i, E_j) \leqslant 2/(\min\{i, j\}),$$

所以 $\{E_i\}_i$ 是 Cauchy 序列.

现在

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i}$$

是非空递减紧致集合的交, 故是非空紧致集合. 据上述结果,

$$\overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i} \subset \overline{B(E_j, 2/j)},$$

因此

$$E \subset \overline{B(E_j, 2/j)}, \quad \forall j.$$

另一方面, 如果 $x \in E_j$, 那么对 $i > j$,

$$x \in \overline{B(E_i, 2/j)},$$

所以当 $k \geqslant j$ 时,

$$x \in \overline{B\left(\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty}}(E_i), 2/j\right)}.$$

选择 $y_k \in \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}$, 使得 $|x-y_k| \leqslant 2/j$. 据紧致性, $\{y_k\}$ 的一个子序列收敛到某个 $y \in R^n$, 且有 $|x-y| \leqslant 2/j$. 但

$$y \in \overline{\bigcap_{k=i}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}} = E,$$

故 $x \in \overline{B(E, 2/j)}$. 我们得到结论: $E_j \subset \overline{B(E, 2/j)}$ 且

$$\rho(E, E_j) \leqslant 2/j.$$

所以 $\{E_j\}$ 在 Hausdorff 度量意义下收敛到 E(整个证明参见文献 [3], 定理 3.16, 第 37 页). □

A.6 符号空间和符号动力系统

设 $S = \{1, \cdots, m\}$ $(m > 1)$ 是有限个符号构成的状态空间. 记

$$\Sigma_m = \{i_1, \cdots, i_m, i_l \in S, \forall l = 1, \cdots, m\},$$

叫做 m 单边符号空间.

记 Σ_m 中的点为 $x = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots), x_{i_l} \in S, \forall l > 0$. 在 Σ_m 上定义度量:

$$\rho(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta(x_{i_l}, y_{i_l})}{2^l},$$

其中

$$\begin{cases} \delta(x_{i_l}, y_{i_l}) = 0, & x_{i_l} = y_{i_l}, \\ \delta(x_{i_l}, y_{i_l}) = 1, & x_{i_l} \neq y_{i_l}. \end{cases}$$

定义

$$\begin{cases} \sigma : \varSigma_m \to \varSigma_m, \\ \sigma((x_{i_1} x_{i_2} \cdots)) = (x_{i_2} x_{i_3} \cdots). \end{cases} \tag{A.6.1}$$

容易验证, σ 是连续的, 叫做 $\varSigma_m$ 上的转移自映射. $\{\varSigma_m, \sigma\}$ 叫做单边符号动力系统. 同样可以定义双边符号空间和双边符号动力系统. 符号动力系统在动力系统一般理论 (包括混沌理论) 和分形几何中有重要应用. 例如, 在满足强分离条件的自相似集上定义的动力系统事实上即是单边符号动力系统. 符号动力系统内容丰富, 我们这里不作过多讨论, 有兴趣的读者可参考有关文献, 例如文献 [29].

附　录　B

本附录扼要介绍测度论和遍历理论基础 [5,24].

B.1　测度空间和测度

设 X 为非空集合. 先引进序列极限的概念. 设 $\{E_j\}$ 是 X 的子集的序列. 定义 $\{E_j\}$ 的下极限和上极限分别为

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$$

和

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j.$$

前者是由除有限个外属于所有其余 E_j 的点构成的集合, 后者则是由属于无穷多 E_j 的点所构成. 易见后者包含前者. 当两者相等时, 记为 $\lim E_j$. 当 E_j 为单调序列时, 其下、上极限相等.

X 的一个非空子集合族 $\mathfrak{B}$ 称为 X 的一个 σ 代数, 如果下述条件得到满足:

(1) $\varnothing, X \in \mathfrak{B}$;

(2) $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow X - A \in \mathfrak{B}$;

(3) $A_n \in \mathfrak{B}, n \geqslant 1 \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$.

一个非空集合 X 加上其上一个 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 称作一个测度空间, 记作 $(X, \mathfrak{B})$.

$(X, \mathfrak{B})$ 上一个有限测度是指 σ 代数上的一个正函数:

$$m : \mathfrak{B} \to R^+,$$

满足条件:

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) 可数可加性, 即

$$A_n \in \mathfrak{B}, n > 0, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m, \Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

这时称 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 为可测空间. 称 $\mathfrak{B}$ 的成员为 m 可测集. 如果 $M(X) = 1$, 称 m 为概率测度, $(X, \mathfrak{B}, m)$ 为概率空间.

定理 B.1.1 (测度的连续性) 设 $(X, \mathfrak{B}, m)$. 则

(a) 当 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_j \subset \cdots$ 时, 有

$$m(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} m(E_j).$$

(b) 当 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_j \supset \cdots$ 时, 有

$$m(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} m(E_j).$$

(c) 设 $\{E_j\}$ 为任意可测序列, 则

$$m(\varliminf_{j\to\infty} E_j) \leqslant \varliminf_{j\to\infty} m(E_j).$$

证明从略 [5].

设 $(X_1, \mathfrak{B}_1, m_1)$ 和 $(X_2, \mathfrak{B}_2, m_2)$ 为两个概率空间.

(a) 称映射 $T : X_1 \to X_2$ 是可测的, 如果 $T^{-1}(\mathfrak{B}_2) \subset \mathfrak{B}_1$, 即 $B_2 \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow T^{-1}B_2 \in \mathfrak{B}_1$.

(b) 称 $T : X_1 \to X_2$ 是保测的, 如果 T 是可测的且 $m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2), \forall B_2 \in \mathfrak{B}_2$.

(c) 称 $T : X_1 \to X_2$ 是可逆保测的, 如果 T 保测、一对一且 T^{-1} 也是保测的.

我们更多地是讨论自映射, 即 $T : (X, \mathfrak{B}, m) \to (X, \mathfrak{B}, m)$, 或简单地, $T : X \to X$.

(d) 自映射 T 叫做遍历的, 如果 $B \in \mathfrak{B}$ 则 $T^{-1}(B) = B \Rightarrow m(B) = 1$ 或 $m(B) = 0$. 遍历性是一个重要概念, 深入讨论见文献 [24].

注 (1) σ 代数的取法不唯一, 如何取 σ 代数视情况而定. 如果 X 是度量空间, 一般取由开集生成的最小的 σ 代数, 通常称它为 Borel σ 代数. 容易证明, 任意给定一个非空子集合族, 可以唯一生成一个最小的 σ 代数, 包含其中每一个元素为其可测集.

(2) 给定 $m : \mathfrak{B} \to R^+$, 如何判断它是否为测度不是一件容易的事情, 其深入讨论见文献 [24].

本书所讨论的 Hausdorff 测度一般都不是测度, 而是外测度或度量外测度. 下一节将扼要介绍之.

B.2 外测度和度量外测度

设 X 为非空集合, 记 2^X 为 X 的所有子集构成的集合族 (包含空集). 定义函数 $\mathcal{V} : 2^X \to [0, \infty]$, 满足

(a) $\mathcal{V}(\varnothing)=0$;

(b) 单调性, 即 $A'\subset A\Rightarrow\mathcal{V}(A')\leqslant\mathcal{V}(A)$;

(c) 次可加性, 即对 X 的任意子集合序列 (A_j), 有

$$\mathcal{V}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{V}(A_j),\tag{B.2.1}$$

则称 $\mathcal{V}$ 为 X 上的一个外测度.

设 $\mathcal{V}$ 是 X 上的一个外测度. 子集合 $E\subset X$ 叫做 $\mathcal{V}$ 可测的, 如果对任意 $A\subset X$, 有

$$\mathcal{V}(A)=\mathcal{V}(A\cap E)+\mathcal{V}(A-E),\tag{B.2.2}$$

即 E 对 A 的分解具有可加性. 验证集合 E 是 $\mathcal{V}$ 可测的, 只需证明

$$\mathcal{V}(A)\geqslant\mathcal{V}(A\cap E)+\mathcal{V}(A-E),$$

因为相反的不等号由次可加性给出.

外测度不是测度, 直接研究不方便, 其重要性由下述定理给出.

定理 B.2.1 *设 $\mathcal{V}$ 为 X 上的一个外测度, 则所有的 $\mathcal{V}$ 可测集合 $\mathcal{M}$ 构成一个 σ 代数, 且 $\mathcal{V}$ 在其上的限制是一个测度.*

鉴于这个定理的重要性, 我们给出详细证明 [5].

证明 显然 $\varnothing\in\mathcal{M}$, 故 $\mathcal{M}$ 非空. 据 $\mathcal{V}$ 可测集的定义, $\mathcal{M}$ 显然对取补是封闭的. 下面证明 $\mathcal{M}$ 对可列并是封闭的, 并满足可数可加性.

设 $E_1,E_2,\cdots\subset\mathcal{M}$ 是任意集合序列. 对它们反复应用 $\mathcal{V}$ 可测集的定义, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(A)=&\mathcal{V}(A\cap E_1)+\mathcal{V}(A-E_1)\\=&\mathcal{V}(A\cap E_1)+\mathcal{V}((A-E_1)\cap E_2)+\mathcal{V}(A-E_1-E_2)\\&\cdots\cdots\cdots\\=&\sum_{j=1}^{k}\mathcal{V}\left(\left(A-\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\mathcal{V}\left(A-\bigcup_{j=1}^{k}E_j\right).\end{aligned}$$

因此, 对所有 k,

$$\mathcal{V}(A)\geqslant\sum_{j=1}^{k}\mathcal{V}\left(\left(A-\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\mathcal{V}\left(A-\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right),$$

从而

$$\mathcal{V}(A)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{V}\left(\left(A-\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\mathcal{V}\left(A-\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right).$$

另一方面

$$A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(A - \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right).$$

从上面的推导, 易见

$$\mathcal{V}(A) \leqslant \mathcal{V}\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) + \mathcal{V}\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{V}\left(\left(A - \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right) + \mathcal{V}\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leqslant \mathcal{V}(A).$$

从而

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M},$$

故 $\mathcal{M}$ 是 σ 代数.

又设 $E_1, E_2, \cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 的不交序列, 并取 $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 可得

$$\mathcal{V}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(E_j).$$

综上可知, $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的测度. □

设 X 是度量空间 (一般取 X 为欧氏空间的子集并取通常度量), 并设 $\mathfrak{B}$ 为 Borel σ 代数. 设 $\mathcal{V}$ 为 X 上一个外测度. 如果对任意有正距离的两个集合 $E, F \subset X$ 满足

$$\mathcal{V}(E \cup F) = \mathcal{V}(E) + \mathcal{V}(F),$$

则称 $\mathcal{V}$ 为度量外测度.

可以证明, 一个度量外测度的可测集构成的集合族包含其 Borel σ 代数. 这里不给出其证明, 读者可参考文献 [5].

本书所讨论的 Hausdorff 测度一般都是度量外测度, 因此限制在 Borel σ 代数上都是测度. 这是我们经常要用到的. 测度的支撑是指最小的紧致集合, 它有满测度. 满足开集条件的自相似集, 其不变集即是它的支撑.

B.3　紧致度量空间上的测度

设 X 是一个紧致可度量空间, 其上 Borel σ 代数记为 $\mathfrak{B}$. 记 X 上全部概率测

度的集合为 $M(X)$. 对每一个点 $x \in X$, 可以定义一个测度 δ_x:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \in \mathfrak{B}, \\ 0, & x \notin A \in \mathfrak{B}. \end{cases}$$

容易验证, δ_x 是 X 上的一个概率测度, 称作 x 处的点测度或原子测度. 因此, $M(X) \neq \varnothing$.

设 $\mu, \nu \in M(X)$. 定义

$$\lambda\mu + (1-\lambda)\nu \in M(X), \quad \lambda \in [0,1],$$

称作 μ 和 ν 的凸组合. 特别地, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X, n > 1$, 称

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$$

为有限个点测度的凸组合. 因此, $M(X)$ 上有仿射结构. 利用 Riesz 表现定理可以在 $M(X)$ 上建立弱拓扑, 使得 $M(X)$ 是紧致可度量凸空间[24].

B.4 紧致系统的不变测度

设 X 为紧致可度量空间. 连续自映射

$$f : X \to X$$

称作 (单边) 拓扑动力系统或紧致系统, 记作 (X, f). 下述符号分别表示系统 (X, f) 的不动点集、周期点集、回复点集和非游荡集:

$$F(f) \subset P(f) \subset R(f) \subset \Omega(f).$$

设 $m \in M(X)$. m 称作对 f 不变的, 如果

$$m(A) = m(f^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

所有 f 的不变测度的集合记为 $M(x, f)$.

设 $m \in M(X, f)$. m 称作 f 的遍历测度, 如果

$$A \in \mathfrak{B}, \quad f^{-1}(A) = A \Rightarrow m(A) = 0, \quad \text{或 } m(A) = 1.$$

所有 f 的遍历测度的集合记为 $E(X, f)$.

1937 年, Kryloff-Bogoliuboff 证明了下述重要定理.

定理 B.4.1

$$\varnothing \neq E(X,f) \subset M(X,f) \subset M(X),$$

其中 $M(X,f)$ 是 $M(X)$ 的紧致凸子集, 而 $E(X,f)$ 由 $M(X,f)$ 中"尖点"(extreme point) 构成 (连续动力系统情形参见文献 [19], 离散动力系统情形参见文献 [24]).

所谓 $M(X,f)$ 中 "尖点", 是指其中不能表成其中任意其他两点的凸组合的点. 例如, 凸集多边形中只有顶点是尖点, 因为只有它们不能表成任意其他两点的凸组合 (图 B.4.1, 左图), 而凸集圆盘其圆周上的点都是而且只有它们是尖点, 因为只有它们不能表成其他任意两点的凸组合 (图 B.4.1, 右图). 注意, 如果

$$w = \lambda u + (1-\lambda)v, \quad \lambda \in (0,1),$$

则称 w 是 u, v 的凸组合.

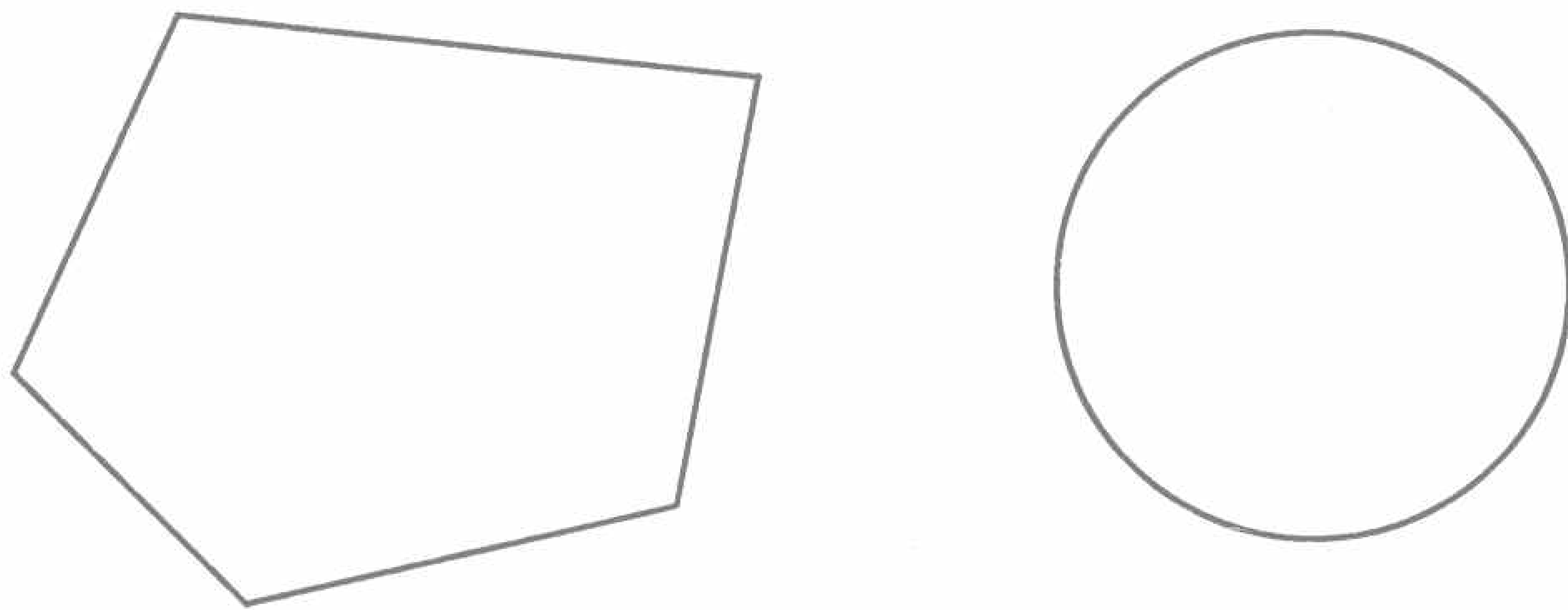


图 B.4.1 多边形和圆盘

这个定理是整个紧致动力系统的基础. 分形几何与动力系统有密切联系, 因此对分形几何也是重要的. 例如, 在满足强分离条件的自相似集上可以建立动力系统, 并已知 $\mathcal{H}$ 测度是其遍历测度[7] . 至于进一步的讨论, 如遍历测度是极大熵测度的充要条件等, 因为涉及拓扑熵等概念, 这里不作讨论, 有兴趣的读者可参阅文献 [5, 24].

在紧致系统的不变测度理论中, 下述结果是非常有用的.

记号同上. 对每一点 $x \in X, M(X)$ 上, 沿 x 的轨道的点测度的平均序列

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \right\}$$

有极限点, 且所有这些极限点均对 f 不变. 即用 M_x 表示上述序列的全部极限点的集合, 则

$$M_x \subset M(X,f), \quad \forall x \in X.$$

当 x 是 f 的 n 周期点时,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in E(X,f),$$

即周期点轨道生成遍历测度. 在这个意义下, 有时可以把周期轨道看作遍历测度 (支撑基数有限的遍历测度就是周期轨道). 这个结果的逆不真. 但是, 设 $m \in M(X, f)$, 则

$$m \in E(X, f) \Leftrightarrow \exists Y \in \mathfrak{B}, m(Y) = 1, \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \to m, \forall x \in Y.$$

存在非周期轨道的遍历测度, 也就是存在支撑为无限集的遍历测度. 熟悉动力系统的读者都清楚, 无周期点的圆周自映射就只有具有无限集合作为支撑的遍历测度.

如我们前面所述, 遍历测度是不变测度集合中的尖点, 这样的点构成不变测度. 集合中的 "小集合", 可这个 "小集合" 却几乎集中了不变测度的全部重要信息, 因为每一个不变测度都是遍历测度的广义凸组合. 例如, 在动力系统中证明一个可测集是概率零测集 (即对所有不变测度均有零测度的集合) 是很重要的, 这时只需证明这个集合对所有遍历测度有零测度就够了.

据作者所知, 上述基本结果在分形几何上应用还不多, 因而其重要性尚不明显, 但对动力系统那就非常重要了 [24].

B.5 小 集 合

在本附录最后, 我们从集合论、拓扑学和测度论不同角度总结一下"小集合"这个新概念. 我们在前面曾经说过, "小集合"往往是困难问题的症结, 因而特别值得注意, 在动力系统中如此, 在分形几何中看来也是如此.

一个集合称作另一集合的"小集合", 如果前者的基数严格小于后者. 拓扑空间中的"小集合"是指无处稠密子集、第一纲集等.

设 (X, f) 是一个紧致可度量空间, 并赋予其 Borel σ 代数. 设 $m \in M(X)$. 集合 $A \in \mathfrak{B}$ 称作 m 的"小集合", 如果 $m(A) = 0$; 集合 $A \in \mathfrak{B}$ 称作 (X, f) 的"小集合", 如果 $m(A) = 0, \forall m \in M(X, f)$.

设 E 是满足开集 (强分离) 条件的自相似集, $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$. 已知

$$\mathcal{H}^s(E - E_1) = 0,$$

因此 $E - E_1$ 是 $\mathcal{H}^s$"小集合".

它是系统 (E, f), 即 E 上紧致系统的 "小集合" 吗? 是集合论意义下的 E 的"小集合"吗? 探讨 $E - E_1$ 的不同意义下的"小集合"性质对研究自相似集的结构有重要意义.

参 考 文 献

[1] Christoph Bandt, Nguyen Viet Hung, Hui Rao. On the open condition for self-similar fractal. PAMS, 2006.

[2] Christoph Bandt, Hui Rao. Topology and separation of self-similar fratals in plane. Nonlinearity, 2007, 20: 1463-1474.

[3] 代雄平, 周作领, 耿祥义. Some relations between Hausdorff-dimensions and entropies. Science in China. Seriers A,1998, 41: 10.

[4] Edgar G A. Measure, Topology and Fractal Geometry. New-York: Springer-Verlag, 1990.

[5] Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[6] Falconer K J. Fractal Geometry. New York: John Wiley and Sons, 1990.

[7] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry. New York: John Wiley and Sons, 1997.

[8] 何伟弘, 周作领. 上凸密度函数与 Hausdorff 测度 ——Sierpinski 垫片. 中山大学学报 (自然科学版), 2001, 30(1): 112-113.

[9] 贾保国, 周作领, 朱智伟. A lower bound for the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket. Nonlinearity, 2002, 15: 393-404.

[10] 贾保国, 周作领, 朱智伟. 三分 Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度的估计. 数学学报, 2003, 46(4): 747-752.

[11] 贾保国, 周作领, 朱智伟. Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度的下限. 数学年刊, 2003, 24(A5): 575-582.

[12] 贾保国, 周作领, 朱智伟. The packing measure of the Cartesian product of the middle third Cantor set with itself. J.Math.Anal.Appl., 2003, 288: 424-441.

[13] 罗俊, 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度与连续性. 数学学报, 2003, 46(3): 457-462.

[14] 何伟弘, 罗俊, 周作领. Hausdorff 测度与等径不等式. 数学学报, 2005, 48(5): 939-946.

[15] Marion J. Measures de Hausdorff d'enembles fractals. Ann.Sci.Math.Quebc, 1987, 11: 111-132.

[16] Mandelbrot B B. Fractal: Form, Chance, and Dimemsion. San Francissco: W.H.Freeman and Co.(Int.,8.2,8.3), 1977.

[17] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francissco: W.H.Freeman and Co.(Int.,8.3,8.7,8.8,8.9), 1982.

[18] Manuel Moran. Computability of the Hausdorff and panking measuresof self-similar

sets and the self-similar tiling principle. Nonlinearity, 2005, 18: 559-570.

[19] 涅梅茨基 B B, 斯捷潘诺夫 B B. 微分方程定性论. 王柔怀, 童勤谟译. 科学出版社, 1959.

[20] 瞿成勤, 周作领. Hausdorff measures for a class of homogeneous Moran sets. Nonlinear Anal.,2006, 65: 442-447.

[21] 史树中. 凸分析. 上海科学技术出版社, 1990.

[22] Steven R L. Convex Sets and Their Applications. John and Sons, 1982.

[23] SunWenxiang. Topological entropy and the complete invariant for expensive maps. Nonlinearity, 2000, 13.

[24] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. Berlin: Springer, 1982.

[25] 王向宇. 经典分形集测度上的计算机搜索 I—— 对典型例子 Sierpinski 垫片编码技术的剖析. 计算数学, 1999, 21(1).

[26] 王兴华. The upper estimate and conjecture on Hausdorff measure of the Sierpinski gasket. 自然科学进展, 1999, 9(11): 812-819.

[27] 王兴华. 一个关于 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度. 自然科学进展, 2001, 11 (9).

[28] 熊金城. 点集拓扑讲义. 高等教育出版社, 2003.

[29] 周作领. 符号动力系统. 上海科教出版社, 1997.

[30] 周作领. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度. 自然科学进展, 1997, 7(4): 405-409.

[31] 周作领. The Hausdorff measure of Sierpinski gasket. Sci. China A, 1997: 1016-1021.

[32] 周作领. The Hausdorff measure of the self-similar sets——the Koch curve. Sci.China A, 1998, 41(7): 723-728.

[33] 周作领, 冯力. Hausdorff 测度的计算与估计. 中山大学学报 (自然科学版), 1999, 38(5): 1-3.

[34] 周作领, 冯力. A new estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket. Nonlinearity, 2000, 13: 479-491.

[35] 周作领, 冯力. Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: a brief survey of recent results. Nonlinearity, 2004, 17: 493-502.

[36] 周作领, 冯力. The minimum of the upper convex density of the product of the Cantor set with itself. Nonlinear Analysis, 2008, 68(11).

[37] 周作领, 冯力. Some problems on fractal geometry and topological dynamical systems. Anal. Theory Appl., 2009, 25(1).

[38] 周作领, 罗俊. A note on the dynamical system defined on a self-similar set satisfying OSC. 中山大学学报 (自然科学版), 2002, 41(1): 95-96.

[39] 周作领, 吴敏. 一类 Sierpinski 海绵的 Hausdorff 测度. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37(6): 116-120.

[40] 周作领, 吴敏. The Hausdorff measure of a Sierpinski carpet. Sci. China A, 1999, 42(7): 673-680.

[41] 周作领, 吴敏, 赵燕芬. The Hausdorff measure of A class of generalized Sierpinski sponges. Chin. J. Contemp. Math., 2001, 32(1): 55-64.

[42] 朱智伟, 周作领. 上凸密度函数与 Hausdorff 测度 ——Koch 曲线. 中山大学学报 (自然科学版), 2001, 40(6): 1-2.

[43] 朱智伟, 周作领, 贾保国. On the lower bound of the Hausdorff measure of the Koch curve. Acta Mathematica Sinica. English Series, 2003, 19 (1): 715-728.

[44] 朱智伟, 周作领, 贾保国. 平面上一类自相似集的 Hausdorff 测度与上凸密度. 数学学报, 2005, 48 (3): 535-540.

[45] 朱智伟, 周作领, 贾保国. A new lower bound of the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket. Analysis in Theory and Applications, 2006, 22(1): 8-19.

[46] 朱智伟, 周作领, 罗俊. 一类广义 Sierpinski 海绵的填充测度. 数学年刊, 2004, 25A(1): 33-42.

[47] 朱智伟, 周作领, 贾保国. 对称 Cantor 集自乘积集的 Hausdorff 中心测度.数学学报, 2006, 49(4): 919-926.

[48] Xu Shaoyuan, Su Weiyi, Zhou Zuoling. On the exact Hausdorff measure of a class of self-similar sets satisfying open set condition. Analysis in Theory and Applications, 2008, 24(1): 93-100.

索 引